Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems
Prof. Dr. Peter Benner, Dr. Sara Grundel, Jennifer Przybilla Sommersemester 2020

Numerische Lineare Algebra 2 – 11. Hausaufgabe

Bitte senden Sie die Lösungen inklusive der MATLAB® Implementierungen bis zum 03.07.20 an *przybilla@mpi-magdeburg.mpg.de.*

Aufgabe 1 (Randomisierte Niedrig-Rang Matrix Approximationen)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $m \leq n$ und $\text{Rang}(A) = m$. Das Ziel ist es, eine Approximation von A zu berechnen, welche von niedrigem Rang $k \leq m$ ist. Erinnern Sie sich, dass das gemacht werden kann, indem die eine (dünne) Singulärwert Zerlegung (SVD) von A nutzen und implementieren Sie diesen Ansatz in MATLAB.

Betrachten und implementieren Sie nun den folgenden randomisierten Ansatz, welcher eine Approximation von Rang $2k$ liefert:

1. Generieren Sie eine randomisierte Gaussian Matrix $\Omega \in \mathbb{R}^{m \times 2k}$ (d.h. Einträge unterliegen der Gaußschen Standardverteilung)

2. $Y := AA^TA\Omega$.

3. Berechne Q mit orthonormalen Spalten, sodass $\text{range}(Q) = \text{range}(Y)$.

4. Berechneen Sie die SVD von Q^TA: $USV^T = Q^TA$.

5. Generieren Sie eine Niedrig-Rang Approximation durch $\hat{A}_\Omega := (QU)SV^T$.

Führen Sie beide Algorithmen aus und vergleichen Sie bezüglich der Gesamtrechendauer und der Approximationsqualität der gernerierten Resultate in der Spektral Norm. Nutzen Sie $A = \texttt{rand}(5000, 500)$ und $k = 10, 50, 100$ als Testfall.