Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems
Prof. Dr. Peter Benner, Dr. Sara Grundel, Jennifer Przybilla

Sommersemester 2020

Numerische Lineare Algebra 2 – 10. Hausaufgabe

Bitte senden Sie die Lösungen inklusive der MATLAB® Implementierungen bis zum 26.06.20 an *przybilla@mpi-magdeburg.mpg.de.*

Aufgabe 1 (Matrix Exponential)

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Matrix Exponentials

a) $\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}$ für kommutierende Matrizen $A,\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

b) $\mathrm{e}^{A\otimes I_m + I_n \otimes B} = \mathrm{e}^A \otimes \mathrm{e}^B$ für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n},\ B \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

c) $\det\left(\mathrm{e}^A\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$.

Hinweis: Nutzen Sie die Potenzreihe $\mathrm{e}^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$.

Aufgabe 2 (Padé Approximation and Scaling & Squaring für e^A)

Betrachten Sie die rationale Approximation $r_m(z) = \frac{p_m(z)}{q_m(z)}$ mit

$$p_m(z) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(2m-j)!m!}{(2m)!(m-j)!j!} z^j, \quad q_m(z) = p_m(-z),$$

die genutzt wird, um e^z zu approximieren.

a) Betrachten sie die Auswertung von $r_m(A) = p_m(A)q_m(A)^{-1}$ in A. Wie in der Vorlesung besprochen, benötigen wir nur $d+1$ Matrix-Matrix Multiplikationen, um $p_m(A),\ q_m(A)$ für geraden Grad $m = 2d,\ d \in \mathbb{N}$ auszuwerten.

  i) Leiten Sie einen analogen Weg her, um $p_m,\ q_m$ für ungerade $m = 2d+1$ herzuleiten, der immer noch nur $d+1$ Matrix-Matrix Multiplikationen benötigt.

  ii) Finden Sie einen noch "günstigeren" Weg für Grad $m \geq 12$ (d.h., benötigt $\leq d+1$ Matrix-Matrix Multiplikationen).

b) Implementieren Sie die scaling & squaring Methode indem Sie einen festen Padé Grad $m = 9$ und scaling(squaring) Parameter $s \in \mathbb{N}$ nutzen, sodass $\|\frac{A}{2^s}\|_1 \leq 1$.