Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg Sommersemester 2020
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems
Prof. Dr. Peter Benner, Dr. Sara Grundel, Jennifer Przybilla

Numerische Lineare Algebra 2 – 9. Hausaufgabe

Bitte senden Sie die Lösungen inklusive der MATLAB® Implementierungen bis zum 19.06.20 an *przybilla@mpi-magdeburg.mpg.de*.

Aufgabe 1 (Berechnung von $f(A)$ mithilfe der Schurform)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, f sei definiert auf $\{\lambda, m\}$, wir nehmen (für jetzt) an, dass alle n Eigenwerte paarweise verschieden sind. Leiten Sie eine Methode her, um $f(A)$ mithilfe der komplexen Schurform von A zu berechnen. Nutzen Sie dabei die Ergebnisse aus Aufgabe 3 der letzten Hausaufgabe 8. Implementieren Sie diese Methode in MATLAB und testen Sie diese mit zufälligen Matrizen und Funktionen Ihrer Wahl.
Hinweis: Sie sollten keine Probleme haben, die Diagonale von $f(A)$ zu bestimmen. Nutzen sie für die anderen Einträge **a)** aus Aufgabe **3** der letzten Hausaufgabe 8.

Aufgabe 2 (Matrix Gleichungen mit Matrix Funktionen)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}_-$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Zeigen Sie, dass

$$X = \int_0^T \mathrm{e}^{At}\, BB^T\, \mathrm{e}^{A^T t}\, dt, \quad T < \infty$$

eine Lösung von

$$AX + XA^T = -BB^T + \mathrm{e}^{AT}\, BB^T\, \mathrm{e}^{A^T T}$$

ist.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Differentialgleichung mit Zeitableitungen zweiter Ordnung:

$$\ddot{x}(t) + Ax(t) = 0, \;\; x(0) = x_0, \;\; \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Diese hat die Lösung $x(t) = \cos(\sqrt{A}t)x_0 + (\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}t)\dot{x}_0$. Zeigen Sie, dass $x(t)$ identisch ist für alle $\sqrt{A}$ die im Quadrat A ergeben.