

## Numerische Lineare Algebra 2 – 6. Hausaufgabe

Bitte senden Sie die Lösungen inklusive der MATLAB<sup>®</sup> Implementierungen bis zum 29.05.20 an [przybilla@mpi-magdeburg.mpg.de](mailto:przybilla@mpi-magdeburg.mpg.de).

Aufgabe 1 (Hamiltonian Matrices)

Seien  $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$  und  $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ .

a) Zeigen sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- i)  $H$  ist Hamiltonian ( $(HJ)^T = HJ$ ).
- ii)  $H = JS$  für eine Matrix  $S = S^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ .
- iii) Es gilt  $(JH)^T = JH$ .
- iv)  $H$  hat die folgende Struktur

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & -H_{11}^T \end{bmatrix}$$

wobei  $H_{12} = H_{12}^T$ ,  $H_{21} = H_{21}^T$ .

b) Sei  $p_H$  das charakteristische Polynom von  $H$ . Zeigen Sie, dass:

- i) wenn  $H$  Hamiltonian ist, dann gilt  $p_H(\lambda) = p_H(-\lambda)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .
- ii) wenn  $H$  Hamiltonian ist und für  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt, dass  $p_H(\lambda) = 0$ , dann folgt

$$p_H(-\lambda) = p_H(-\bar{\lambda}) = p_H(\bar{\lambda}) = 0.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass wenn  $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  Hamiltonian ist und  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  symplektisch, dann ist die Matrix

$$\tilde{H} := S^{-1}HS \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

Hamiltonian.

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Jede orthogonale symplektische Matrix  $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  kann geschrieben werden als

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ -U_2 & U_1 \end{bmatrix} \quad \text{für } U_1, U_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$