Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems
Prof. Dr. Peter Benner, Dr. Sara Grundel, Jennifer Przybilla

Sommersemester 2020

Numerische Lineare Algebra 2 – 5. Hausaufgabe

Bitte senden Sie die Lösungen inklusive der MATLAB® Implementierungen bis zum 22.05.20 an *przybilla@mpi-magdeburg.mpg.de*.

Aufgabe 1 (Lemma II.17)

Zeigen Sie, dass die zeit-kontinuierliche Lyapunov Gleichung

$$AX + XA^T = -W, \quad \Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$$

äquivalent ist zur zeit-diskreten Lyapunov Gleichung

$$X = C(p)XC(p)^H + \tilde{W}(p),$$

wobei $C(p) := (A - \bar{p}I_n)(A + pI)^{-1}$, $\tilde{W}(p) := -2\mathrm{Re}(p)(A + pI_n)^{-1}W(A + pI_n)^{-H}$ für alle $p \in \mathbb{C}^-$.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Lyapunov Gleichung

$$AX + XA^T + bb^T = 0, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ (large, sparse)}, \ b \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Sei $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{C}_-$ eine gegebene Menge an Shift-Parametern.

Implementieren Sie die niedrig-Rang ADI iteration aus der Vorlesung und testen Sie diese anhand der gegebenen Daten (`large_lyap.mat`, includes shifts) auf der Homepage. Das auftretende lineare system sollte durch den backslash \" Befehl gelöst werden. Nutzen Sie dabei die niedrig-Rang Struktur von R_k aus (siehe Vorlesung) und nutzen Sie die normaliesierte Residuumnorm zu (1) als Abbruchbedingung: $\|R_k\|_2/\|b\|_2^2 < 10^{-8}$. **Hinweis:** Berechnen Sie $X \approx X_k = Z_k Z_k^T$ nicht explizit, d.h., geben Sie Z_k aus!

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für alle $p, q \in \mathbb{C}$ und $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ invertierbar die Matrizen $(A + pI)$ und $(A + qI)^{-1}$ kommutieren.