Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems
Prof. Dr. Peter Benner, Dr. Sara Grundel, Jennifer Przybilla

Sommersemester 2020

Numerische Lineare Algebra 2 – 4. Hausaufgabe

Bitte senden Sie die Lösungen inklusive der MATLAB® Implementierungen bis zum 15.05.20 an *przybilla@mpi-magdeburg.mpg.de.*

Aufgabe 1 (Theorem II. 15)

Wir betrachten das Arnoldi Block Verfahren, welches in Algorithmus **??** gegeben ist. Das Verfahren

Algorithm 1 Block Arnoldi Process

Compute the QR-decomposition $V_1 R_1 = B$.
for $k = 1, 2, \dots$ **do**
  $W = AV_k$
  for $j = 1, 2, \dots, k$ **do**
    $H_{j,k} = Q_j^T W$
    $W = W - H_{j,k} V_j$
  end for
  Compute the QR-decomposition $V_{k+1} R_{k+1} = W$
  $H_{k+1,k} = R_{k+1}$
end for

erzeugt nach k Schritten eine Basis $Q_k = [V_1, \dots, V_k]$ des Krylov-Raums $\mathcal{K}_k(A, B)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Es gilt $H_k = Q_k^T A Q_k$ und $AQ_k = Q_k H_k + V_{k+1} H_{k+1,k} E_k^T$, wobei E_k die letzten m Spalten von I_{km} enthält. Damit können wir die reduzierte Lyapunov Gleichung

$$H_k Y_k + Y_k H_k^T + Q_k^T B B^T Q_k = 0, \quad H_k := Q_k^T A Q_k \tag{1}$$

lösen und so eine approximierende Lösung $X_k = Q_k Y_k Q_k^T$ der Lyapunov Gleichung

$$AX + XA^T = -BB^T$$

erhalten. Entsprechend ist das Residuum gegeben als

$$R(Q_k Y_k Q_k^T) = A(Q_k Y_k Q_k^T) + (Q_k Y_k Q_k^T)A^T + BB^T.$$

Angenommen es wurden k schritte des Block Arnoldi Prozesses ausgeführt und es gelte $\Lambda(H_k) \cap \Lambda(-H_k) = \emptyset$. Zeigen Sie, dass die die folgenden Aussagen gelten:

a) Es gilt $Q_k^T R(Q_k Y Q_k^T) Q_k = 0$ genau dann, wenn $Y = Y_k$ wobei Y_k die Lyapunov Gleichung (**??**) löst.

b) Die Frobenius-Norm des Residuums ist geben durch

$$\|R(Q_k Y_k Q_k^T)\|_F = \sqrt{2}\|H_{k+1,k} E_k^T Y_k\|_{\mathrm{F}}.$$

Aufgabe 2

Wir betrachten die Matrix $C(p) := (A - \overline{p}I)(A + pI)^{-1}$ für eine Matrix A mit $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$, d.h. alle Eigenwerte von A haben einen negativen Realteil, und $p \in \mathbb{C}^-$. Die Eigenwerte dieser Matrix $C(p)$ sind

$$\Lambda(C(p)) = \left\{ \frac{\lambda - \overline{p}}{\lambda + p} \;:\; \lambda \in \Lambda(A) \right\}.$$

Zeigen Sie dass alle Eigenwerte $\mu \in \Lambda(C(p))$ erfüllen: $|\mu| < 1$.