Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems
Prof. Dr. Peter Benner, Dr. Sara Grundel, Jennifer Przybilla Sommersemester 2020

# Numerische Lineare Algebra 2 – 3. Hausaufgabe

Bitte senden Sie die Lösungen inklusive der MATLAB® Implementierungen bis zum 08.05.20 an *przybilla@mpi-magdeburg.mpg.de.*

Aufgabe 1 (Bartels-Stewart)

Wir betrachten die Sylvester Gelichung

$$AX + XB = Q, \tag{1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\Lambda(A) \cap \Lambda(-B) = \emptyset$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und der gesuchten Lösung $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

**(a)** Leiten Sie basieren auf der Herleitung der komplexen Bartels-Stewart Methode für Lyapunov Gleichungen aus der Vorlesung, den Bartels-Stewart Algorithm für Sylvester Gleichungen her und implementieren Sie diesen in MATLAB, sodass dieser (1) löst. Nutzen Sie dabei die komplexen Schur Formen von $A$ und $B$ (d.h., `schur(A,'complex')`). Testen Sie Ihre Implementierung an der Sylvester Gleichung welche in `sylv_eqn.mat` bereitgestellt ist (betrachten Sie dabei zum Beispiel das Residuum $\|AX + XB - Q\|_2$).

**(b)** Nehmen Sie an, eine der Matrizen ist viel kleiner als die andere, z.B. $m \ll n$. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der die Sylvester Gleichung (1) löst ohne die größere Matrix in ihre Schurform zu transformieren. Wäre dieser Algorithmus auch anwendbar, wenn eine der Matrizen klein und dicht besetzt und die andere groß und dünn besetzt ist.

Aufgabe 2 (Lyapunov Stabilisierung)

Sei $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ steuerbar, $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ und $\beta > \rho(A) = \max(|z| \ :\ z \in \Lambda(A))$. Betrachten Sie die Lösung $X$ der Lyapunov Gleichung

$$(A + \beta I)X + X(A + \beta I)^T = 2BB^T.$$

Zeigen Sie, dass $A - BB^TX^{-1}$ Hurwitz ist (d.h. $\Lambda(A - BB^TX^{-1}) \subset \mathbb{C}_-$). In diesem Fall wird $F := -B^TX^{-1}$ *stabilisierende Feedback Matrix* für $(A, B)$ genannt. **Hinweis:** Theorem II.10 im Skript.

Aufgabe 3 (Remark II.12)

Für dir Matrizen $T_1 \in \mathbb{R}^{n-2}$, $T_3 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\hat{W}_2 \in \mathbb{R}^{n-2\times 2}$ betrachten wir die Sylvester Gleichung

$$T_1X_2 + X_2T_3^T = \hat{W}_2.$$

Zeigen Sie, dass diese Sylvester Gleichung durch ein lineares System der Form

$$(T_1^2 + \alpha T_1 + \beta I_{n-2})X_2 = \tilde{W}$$

gelöst werden kann, wobei $X_2 = [s, t]$, $\tilde{W}_2 = [y, z] \in \mathbb{R}^{n-2\times 2}$ und $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.