Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems
Prof. Dr. Peter Benner, Dr. Sara Grundel, Jennifer Przybilla Sommersemester 2020

Numerische Lineare Algebra 2 – 2. Hausaufgabe

Bitte senden Sie die Lösungen inklusive der MATLAB® Implementierungen bis zum 01.05.20 an *przybilla@mpi-magdeburg.mpg.de.*

Aufgabe 1 (Lemma II.5 und II.3)

Seien $Y \in \mathbb{C}^{j\times k}$ und $Z \in \mathbb{C}^{m\times n}$ gegeben. Die $mj \times kn$ Matrix

$$Y \otimes Z = \begin{bmatrix} y_{11}Z & y_{12}Z & \dots & y_{1k}Z \\ y_{21}Z & y_{22}Z & \dots & y_{2k}Z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{j1}Z & y_{j2}Z & \dots & y_{jk}Z \end{bmatrix}$$

heißt Kronecker Produkt oder Tensor Produkt von Y und Z.

a) Seien W, X, Y, Z Matrizen und die Produkte WX und YZ seien definiert. Zeigen Sie, dass $(W \otimes Y)(X \otimes Z) = (WX) \otimes (YZ)$.

b) Seien S, G nichtsinguläre Matrizen. Zeigen Sie, dass $S \otimes G$ auch nichtsingulär ist und dass $(S \otimes G)^{-1} = S^{-1} \otimes G^{-1}$.

c) Seien A und B ähnliche Matrizen und C und D ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass dann auch $A \otimes C$ und $B \otimes D$ ähnlich sind (A ähnlich zu B wenn $\exists Q$ nichtsingulär, sodass $A = Q^{-1}BQ$).

d) Seien $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$ und $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Angenommen A und B haben die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und $\mu_1, \dots, \mu_m$. Zeigen Sie, dass

$$\Lambda(A \otimes B) = \{\lambda_i \mu_j \,|\, i = 1, \dots, k;\ j = 1, \dots, m\}.$$

Extra: Was sind die Eigenvektoren von $A \otimes B$?

e) Zeigen Sie, dass für $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $\mathcal{O} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ gilt

$$\mathrm{vec}(\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{R}) = (\mathcal{R}^{\mathrm{T}} \otimes \mathcal{T})\mathrm{vec}(\mathcal{O}).$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie die diskrete Lyapunov Gleichung

$$AXA^{\mathrm{T}} - X = -BB^{\mathrm{T}}, \quad X = X^{\mathrm{T}}.$$

Wann hat diese eine eindeutige Lösung? (Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Stephanos.)

Aufgabe 3

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Wir sagen (A, B) ist *steuerbar*, wenn

$$\mathrm{rank}\big([B, AB, \dots A^{n-1}B]\big) = n \quad \Leftrightarrow \quad y^*B \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \ \text{ mit } \ y^*A = y^*\lambda$$

(y sind die linken Eigenvektoren von A).

Zeigen Sie, dass für A Hurwitz, die kontinuierliche Lyapunov Gleichungen $AX + XA^T + BB^T = 0$ durch

$$X = \int_0^\infty e^{At}\, BB^T\, e^{A^T t}\, dt$$

gelöst wird. Zeigen Sie, dass die Lösung positiv definit ist, wenn (A, B) steuerbar ist.