

## Numerische Lineare Algebra 2 – 1. Hausaufgabe

Bitte senden Sie die Lösungen inklusive der MATLAB<sup>®</sup> Implementierungen bis zum 24.04.20 an [przybilla@mpi-magdeburg.mpg.de](mailto:przybilla@mpi-magdeburg.mpg.de).

Aufgabe 1 (Wiederholung QR-Zerlegung)

Mithilfe des Gram-Schmidt Verfahrens lässt sich für eine Matrix  $A \in \mathbb{A}^{m,n}$  die (dünne) QR-Zerlegung  $A = QR$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ , bestimmen :

---

### Algorithm 1 Gram-Schmidt

---

```
1: for  $k = 1, 2, \dots$  do  
2:    $\tilde{q}_j = a_j$   
3:   for  $k = 1, 2, \dots, j - 1$  do  
4:      $r_{kj} = q_k^T a_j$   
5:      $\tilde{q}_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{k,j} q_k$   
6:   end for  
7:    $r_{jj} = \|\tilde{q}_j\|_2$   
8:    $q_j = \tilde{q}_j / r_{jj}$   
9: end for
```

---

a) Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$  mittels Gram-Schmidt Verfahren.

b) Zeigen Sie, dass die dünne QR-Zerlegung  $A = QR$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $m \geq n$ , mit vollem Spaltenrang eindeutig ist. Nutzen Sie dabei aus, dass  $R$  aus dem unteren Dreiecksfaktor der Cholesky Zerlegung von  $A^T A$  hervorgeht.

c) Implementieren Sie die Berechnung einer QR-Zerlegung mittels Gram-Schmidt-Verfahren.

d) Implementieren Sie die QR-Iteration zur Berechnung der Schur-Zerlegung einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ .

Aufgabe 2 (Wiederholung Arnoldi)

Sei  $\mathcal{Q}_k = \mathcal{K}_k(A, b) = \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{k-1}b\}$ , d.h. der  $k$ -te Krylov Raum von  $A, b$ . Das Arnoldi Verfahren kann genutzt werden, um eine Basis von  $\mathcal{K}_k(A, b)$  zu bestimmen:

Zeige, dass  $AQ_k = Q_k H_k + h_{k+1,k} q_{k+1} e_k^T$  gilt. Der Ausdruck  $e_k$  meint den  $k$ -ten Einheitsvektor.

---

**Algorithm 2** Arnoldi process

---

```
1:  $q_1 = b/\|b\|_2$ .  
2: for  $k = 1, 2, \dots$  do  
3:    $w = Aq_k$   
4:   for  $j = 1, 2, \dots, k$  do  
5:      $h_{j,k} = q_j^T w$   
6:      $w = w - h_{j,k}q_j$   
7:   end for  
8:    $h_{k+1,k} = \|w\|$ ,  $q_{k+1} = w/h_{k+1,k}$ .  
9: end for
```

---