Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr. Patrick Kürschner, Janna Puderbach

Wintersemester 2017/18

Einführung Numerische Linear Algebra – 5. Übung

Problem 1 **(Frobeniusnorm)**

Beweisen Sie die Invarianz der Frobeniusnorm für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezüglich orthogonaler Ähnlichkeitstransformationen.

Problem 2 **(Determinaten von Matrizen mit rank-1 Aufdatierung)**

Beweisen Sie: für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\det(I_n + xy^T) = 1 + y^T x$.
Zeigen Sie damit dass für invertierbare $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\det(A + xy^T) = \det(A)(1 + y^T A^{-1} x)$.

Problem 3 **(Symmetrie im verallgemeinerten EWP)**

Seien $A = A^T$ und $B = B^T \succ 0$. Die kanonische Transformation $B^{-1}A$ führt dann auf ein nichtsymmetrisches Eigenwertproblem. Geben Sie eine Möglichkeit an, das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$Ax = \lambda Bx, \ x \neq 0$$

in ein symmetrisches Eigenwertproblem zu überführen. Zeigen Sie, dass die verallgemeinerten Eigenvektoren x ein orthogonales System bezüglich des durch B induzierten Skalarproduktes bilden.

Problem 4 **(Eigenschaften der Singulärwertzerlegung (SVD))**

Sei $r = \operatorname{rank}(A)$, $A = U\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Singulärwertzerlegung, $U = [u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $V = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ orthonormal. Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach:

a) *Schmidt-Eckart-Young-Mirsky-Theorem*: Wenn $k < r$ und $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ dann gilt:

$$\min_{\operatorname{rank}(B)=k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1},$$

d.h. A_k ist die beste Rang k Approximation von A.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \ker A &= \operatorname{span}\{v_{r+1}, \dots, v_m\}, \\ \operatorname{range}(A) &= \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_r\}, \\ \operatorname{co}\ker A &= \operatorname{span}\{u_{r+1}, \dots, u_n\}, \\ \operatorname{range}(A^T) &= \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_r\}. \end{aligned}$$

c) Es gilt: $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2}$.

d) Welche Zusammenhänge bestehen zwischen der SVD von A und den Eigenwertzerlegungen der Matrizen

i) $A^T A$,

ii) AA^T,

iii) $\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$?