Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr. Patrick Kürschner, Janna Puderbach

Wintersemester 2017/18

Einführung Numerische Linear Algebra – 4. Übung

Problem 1 **(Invariante Unterräume)**

Zeigen Sie: für jedes $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es mindestens einen eindimensionalen invarianten Unterraum $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n$. Gilt dies auch für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$?
Sei nun $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda \in \Lambda(A)$ mit $\alpha(\lambda) = 3$, $\gamma(\lambda) = 1$, x der zugehörigen Eigenvektor, und h_1, h_2 die Hauptvektoren. Welche Unterräume $\mathcal{S} \subseteq \operatorname{span}\{x, h_1, h_2\}$ sind A-invariant?

Problem 2 **(Unterräume und Schur-Form)**

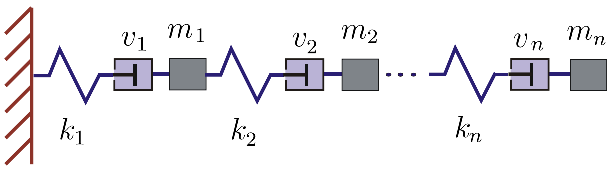
Geben Sie eine Givens-Rotation $G(\theta) \in \mathbb{R}^2$ an mit

$$G(\theta)^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} G(\theta) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \tilde{t}_{12} \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Wie kann man mit Hilfe solcher Givens-Rotationen für eine Matrix A in Schur-Form mit $\Lambda(A) \subset \mathbb{R}$ einen invarianten Unterraum zu einer vorgegebenen Teilmenge von Eigenwerten von A bestimmen?

Problem 3 **(Ursprung des QEP)**

Zur Beschreibung von mechanischen Systemen, insbesondere für Schwingungen oder Vibrationsanalysen, verwendet man in der Regel als Grundmodell das Masse-Feder-System mit Dämpfung.



Dabei sind:

m_i i-te Punktmasse

k_i Federkonstante der i-ten Feder

v_i die i-ten Dämpfungskonstanten für proportionale Dämpfung

Betrachten Sie den Vektor $x = (x_i)^T_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$ der Auslenkungen der i-ten Punktmassen aus der Ruhelage.

a) Leiten Sie aus dem Federgesetz (Federkraft = Federkonstante mal Auslenkung) der proportionalen Dämpfung (Bremskraft = Dämpfungskonstante mal Geschwindigkeit) und dem Newtonschen Gesetz (Kraft = Masse mal Beschleunigung) das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung her, dass das Masse-Feder-System mit Dämpfung beschreibt.

$$M\ddot{x}(t) = -D\dot{x}(t) - Kx(t) \tag{1}$$

Setzen Sie nun für $x(t)$ einen geeigneten Ansatz ein, um das quadratische Eigenwertproblem (QEP) zu erhalten.

b) Schreiben Sie das QEP in ein verallgemeinertes Eigenwertproblem (VEP) um und dieses dann in ein Standard-Eigenwertproblem (EWP). **Hinweis:** Gehen Sie analog vor, wie bei der Umschreibung von Differentialgleichungen höherer Ordnung in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung.

c) Die Umformulierung in ein VEP in **b)** wird auch *Linearisierung des QEP* genannt und ist nicht eindeutig. Geben Sie eine weitere Linearisierung an.

Problem 4 (Berechnung der Hessenberg-Form)

Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert eine orthogonale Matrix, so dass

$$Q^T A Q \;=\; H \;=\; \left[\;\diagdown\!\!\diagdown\;\right], \tag{2}$$

d.h., H ist obere Hessenbergmatrix. Geben Sie einen Algorithmus an, der die Hessenberg-Form wie in (2) berechnet und bestimmen Sie dessen Aufwand. Das fertige Programm sollte neben H auch die Transformationsmatrix Q ausgeben!

Problem 5 (Verallgemeinerte Schurzerlegung)

Wir betrachten das verallgemeinerte EWP $Ax = \lambda Bx$ mit $A,\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Es existieren unitäre Matrizen Q und Z, so dass

$$Q^* B Z = S = \left[\;\diagdown\;\right] \quad \text{und } Q^* A Z = T = \left[\;\diagdown\;\right].$$

Wenn für ein k gilt $t_{kk} = s_{kk} = 0$, dann gilt für das Spektrum $\Lambda(A,\ B) = \mathbb{C}$ und das Paar $(A,\ B)$ nennt man dann *singulär*. Andererseits heißt $(A,\ B)$ *regulär* und

$$\Lambda(A,\ B) = \{\lambda_i := t_{ii}/s_{ii} \ :\ s_{ii} \neq 0\} \ \cup\ \{\lambda_i = \infty \ :\ s_{ii} = 0\}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass im Falle B regulär die verallgemeinerte Schurzerlegung äquivalent zur Schurzerlegung von $B^{-1}A$ ist.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrixpaare $(A,\ B)$ und untersuchen Sie ob sie regulär oder singulär sind.

i) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **ii)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

iii) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **iv)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$