Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr. Patrick Kürschner, Janna Puderbach

Wintersemester 2017/18

Einführung Numerische Linear Algebra – Hausaufgabe 5.

Problem 1 **(8 Punkte)** **(Normale Matrizen)**

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$.

i) A ist normal, d.h. $AA^H = A^H A$.

ii) $U^H AU$ ist normal für jede unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$.

iii) Für jede unitäre Matrix U mit $U^H AU = B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$, $B_{11} \in \mathbb{C}^{k,k}$, gilt $B_{12} = 0$.

iv) Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$, so dass $U^H AU$ diagonal ist.

v) Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $A^H = UA$.

vi) $(Ax, Ay) = (A^H x, A^H y)$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Problem 2 **(5 Punkte)** **(Inverse Iteration)**

Seien $\mu = \tilde{\lambda}$ eine berechnete Approximation zu $\lambda \in \Lambda(A)$ sowie $q^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ mit $\|q^{(0)}\| = 1$. Die *inverse Iteration* ergibt sich, indem in der Potenziteration A durch $(A - \mu I)^{-1}$ ersetzt wird. D.h. es wird in jedem Iterationsschritt ein lineares Gleichungssystem gelöst.
Erklären Sie, warum die inverse Iteration sehr schnell konvergiert, falls die Startnäherung an den Eigenwert gut ist.
Hinweis: Vergleichen Sie dazu auch den Beweis zur Potenziteration.

Problem 3 **(3 Punkte)** **(Beweis zu Lemma VIII.9 der Vorlesung)**

Sei $\mu \in \Lambda(H)$, H unreduzierte Hessenberg-Matrix (d.h. $h_{j+1,j} \neq 0$, $j = 1, \ldots, n-1$) und $H - \mu I = QR$ eine QR-Zerlegung. Zeigen Sie, dass dann für $\tilde{H} := RQ + \mu I$ gilt: $\tilde{h}_{n,n-1} = 0$, $\tilde{h}_{n,n} = \mu$.
Zusatz: Was passiert falls nicht μ, aber $\mu + e$ für $\|e\| < \varepsilon$ Eigenwert ist?