Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr. Patrick Kürschner, Janna Puderbach

Wintersemester 2017/18

Einführung Numerische Linear Algebra – Hausaufgabe 4.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis zum 6.12. ein. Die Dateien zu den Programieraufgaben senden Sie bitte an *janna.puderbach@st.ovgu.de*. Der Dateiname sollte Ihren Namen und die zugehörige Hausaufgaben- und Aufgabenummer enthalten, z.B. `name_ha2a4`. Im Fall mehrerer Programmdateien ist die Verwendung eines Dateiarchivierers empfehlenswert. Geben Sie außerdem bitte die Quellcodes Ihrer Programme in ausgedruckter Form zusammen mit den restlichen Aufgaben ab.

Problem 1 (6 Punkte) (Vorkonditionierte Iterationen I)

Seien $A, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definite Marizen.

a) Zeigen Sie: $P^{-1}A$ ist symmetrisch positiv definit im P-Skalarprodukt $(.,.)_P$.

b) Zeigen Sie: AP^{-1} ist symmetrisch positiv definit im P^{-1}-Skalarprodukt $(.,.)_{P^{-1}}$.

c) Für $A = M - N$ symmetrisch positiv definit und $M = M^T$, zeigen Sie dass $G = I - M^{-1}A$ symmetrisch im A-Skalarprodukt ist.

d) Leiten Sie ein rechts-vorkonditioniertes CG Verfahren her unter Benutzung obiger Aussagen.

Problem 2 (8 Punkte) (Vorkonditionierte Iterationen II)

Machen Sie sich mit den MATLAB® Implementierungen `pcg,minres,gmres` von CG, MINRES, GMRES vertraut. Achten Sie besonders darauf wie Vorkonditionierer verwendet werden können. Lernen Sie außerdem die Berechnung von unvollständigen Cholesky / LU Faktorisierungen mit den `ilu,ichol` Routinen (`luinc,cholinc` in älteren MATLAB Versionen).

a) Welche Art von Vorkonditionierung (Links,Rechts,beidseitig) wird in MATLAB in den Routinen `pcg,minres,gmres` verwendet.

b) Führen Sie die in der folgenden Tabelle aufgeführten numerischen Experimente durch und vergleichen Sie das Verhalten der Verfahren mit unterschiedlichen Vorkonditionierern. Vergleichen Sie stets mit dem Verfahren ohne Vorkonditionierung. Sie können auch mit verschiedenen Abschneidetoleranzen der unvollständigen Faktorisierungen sowie Relaxationsparametern von (S)SOR experimentieren.

Verfahren	Problem	Vorkonditionierer
CG	A, b von HA2A4	unvollständige Cholesky(0.1), SOR(1), SSOR(1)
MINRES	A, b von HA3A2	`P=blkdiag(Q,S)` with $Q \in \{K, \mathrm{diag}(K)\}$ and $S \in \{BK^{-1}B^T, B\mathrm{diag}(K)^{-1}B^T, I\}$ als Schurkomplementapproximationen
GMRES	`convdiff.mat` von Homepage	unvollständige LU(10^{-2}), Gauß-Seidel, and SSOR(1).

Hints: Für einige der obigen Vorkonditionierer kann es einfacher sein P als Funktion zu übergeben, welche $P^{-1}x$ berechnet und zurück gibt, z.B.,

`[x,flag,relres,iter,resvec]=gmres(A,b,[],1e-6,10,@gs); y=gs(x)`

oder alternativ mittels *function handle*

`[x,flag,relres,iter,resvec]=gmres(A,b,[],1e-6,10,@(x)(D-L)\x );`

Problem 3 **(6 Punkte)** **(Mehrgitterverfahren)**

Für $A = M - N = A^T$ betrachten wir die Zweigitter-Iteration aus der Vorlesung inklusive der eingeführten Notation (M - Iterationsmatrix Glättung, P - Prolongationsoperator, $\bar{A} = P^T A P$, e_i, r_i - Fehler, Residuum).

a) Zeigen Sie dass für das Residuum gilt:

$$r_{i+1} = A\left(A^{-1} - P\bar{A}^{-1}P^T\right)(I - M^{-1}A)^k r_i$$

mit $r_i = Ae_i$. Zeigen Sie außerdem dass man nach k Schritten Nach-Glättung (post-smoothing)

$$e_{i+1} = (I - (M^T)^{-1}A)^k (A^{-1} - P\bar{A}^{-1}P^T) A (I - M^{-1}A)^k e_i$$

erhält.

b) Schreiben Sie die allgemeine Zweigitter-Iterationsmatrix

$$(I - (M^T)^{-1}A)^k (A^{-1} - P\bar{A}^{-1}P^T) A (I - M^{-1}A)^k$$

als $I - M_{MG}^{-1}A$ mit $M_{MG} = M_{MG}^T$.