Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr. Patrick Kürschner, Janna Puderbach

Wintersemester 2017/18

Einführung Numerische Linear Algebra – 3. Übung

Problem 1 **(Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)**

Sei $Q = [q_1, \ldots, q_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$, mit $Q^T Q = I_k$ und ein weiterer Vektor $0 \neq t \in \mathbb{R}^n$, $Q^T t \neq 0$ gegeben. Ziel ist es, $\operatorname{span}\{Q\}$ mit t orthogonal zu erweitern, d.h. einen Vektor q_{k+1} zu finden, so dass $Q_+ := [Q, q_{k+1}]$, $Q_+^T Q_+ = I_{k+1}$ und $\operatorname{span}\{[Q, t]\} = \operatorname{span}\{Q_+\}$. Anders ausgdrückt: Wie kann eine gegebene QR-Zerlegung QR um eine Spalte erweitert werden?

a) Wiederholen Sie das (aus der Numerik-Grundvorlesung bekannte) klassische Gram-Schmidt (GS) Verfahren

$$\hat{t} = t - Q(Q^T t), \quad q_{k+1} = \hat{t}/\|\hat{t}\|.$$

Warum ist das modifizierte Gram-Schmidt Verfahren (MGS)

for $i = 1, 2, \ldots, k$ **do**
  $r_i = q_i^T t$
  $t = t - r_i t$
end for
$q_{k+1} = t/\|t\|$

dem klassischen GS vorzuziehen?

b) In der Praxis wird häufig ein iteratives (klassisches oder modifiziertes) GS Verfahren verwendet (auch *repeated* GS (R(M)GS) oder GS *with iterative refinement*). Dabei wird der Gram-Schmidt-Prozess mehrmals wiederholt bis eine gewünschte Genauigkeit erreicht wird. Machen Sie sich auch mit der Implementierung dieses Verfahrens vertraut. Warum reicht es meistens aus, den Gram-Schmidt-Prozess (maximal) zweimal durchzuführen (berühmte Daumenregel: *twice is enough*)?

Problem 2 **(Householder Matrizen)**

Eine Householder Matrix (auch: Householderreflektion) ist eine Matrix der Form $P = I - \frac{2}{v^T v} v v^T$, $v \neq 0$.

- Zeigen Sie dass P symmetrisch, orthogonal und involutorisch ($P^2 = I$) ist. Wie kann man die Anwendung von P auf einen Vektor x geometrisch veranschaulichen?
- Berechnen Sie eine Householder Matrix P so dass $Px = \|x\| e_1$ für $x = [3, 1, 5, 1]$.
- Überlegen Sie sich wie eine QR-Zerlegung (Übung 1 Aufgabe 4b) mittels Givensrotationen (Übung 1 Aufgabe 5) und Householderreflektionen berechnet werden kann.

Problem 3 **(Tridiagonale Matrizen & gewichtetes Jacobi-Verfahren)**

Wir betrachten die $n \times n$ Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{bmatrix} d & s & & \\ s & d & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & s \\ & & s & d \end{bmatrix}, \quad d, s \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\lambda_j = d + 2s\cos(j\theta)$ mit $\theta = \frac{\pi}{n+1}$ und

$$q_j = [\sin(j\theta), \sin(2j\theta), \ldots, \sin(nj\theta)]^T.$$

die Eigenwerte und -vektoren von A sind.

b) Zeigen Sie, dass für $d = 2, s = -1$ (Diskretes 1D Poisson-Problem), die Eigenwerte als $\lambda_j = 4\sin^2(\frac{j\theta}{2})$ dargestellt werden können.

c) Betrachten Sie nun die gewichtete Jacobi-Iteration aus Kap. III und zeigen Sie dass die Iterationsmatrix als $G_\omega = I - \omega D^{-1}A$ geschrieben werden kann. Für welche ω konvergiert die gewichtete Jacobi-Iteration für die obige Matrix A mit $d = 2, s = -1$?

d) Stellen Sie λ_1 von G_ω für A mit $d = 2, s = -1$ bzgl. der Gitterschrittweite $h := \frac{1}{n+1}$ dar und schätzen Sie die trigonometrischen Funktionen durch verschiedene Potenzen von h ab.

Problem 4 **(Sherman-Morrison-Woodbury-Formel)**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, $U, V \in \mathbb{R}^{n\times k}$ für $k \le n$ (in der Praxis $k \ll n$).

a) Beweisen Sie die Sherman-Morrison-Woodbury (SMW) Formel:

$$\left(A + UV^T\right)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(I_k + V^TA^{-1}U\right)^{-1}V^TA^{-1}$$

für $I_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ die Einheitsmatrix und falls $(I_k + V^TA^{-1}U) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ regulär.

b) Schreiben sie einen Algorithmus, der zu gegebenen A, U, V, b das Gleichungssytem

$$\left(A + UV^T\right)x = b \tag{1}$$

löst, ohne dabei die "großen" Inversen $\left(A + UV^T\right)^{-1}$ explizit zu berechnen. Nehmen sie dazu an, dass ein Lösungsverfahren für Gleichungssysteme der Form $Ay = f$ gegeben ist.

Besprechen Sie Vorteile & Nachteile dieses Verfahrens gegenüber einer direkten Lösung von (1)