Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr. Patrick Kürschner, Janna Puderbach Wintersemester 2018

Einführung Numerische Linear Algebra – 2. Übung

Problem 1 **(Speicherformate für dünnbesetzte Matrizen)**

a) Informieren Sie sich über die folgende Speicherformate:

i) *Coordinate List* (COO)

ii) *Compressed Row Storage* (CRS)

iii) *Compressed Column Storage* (CCS)

(Zum Beispiel unter `http://en.wikipedia.org/wiki/Sparse_matrix`.)

Gehen Sie dabei kurz auf Vor- und Nachteile ein. Schreiben Sie außerdem die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 9 \\ 12 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

in allen 3 Formaten.

b) Erklären Sie warum CRS für die Matrixmultiplikation Ax und CCS für die Multiplikation $A^T x$ von Vorteil ist.

Problem 2 **(Tschebyscheff Polynome)**

a) Beweisen Sie für die Tschebyscheff Polynome $\tau_0(t) = 1$, $\tau_1(t) = t$, $\tau_{k+1}(t) = 2t\tau_k(t) - \tau_{k-1}(t)$, dass die folgende Darstellung gilt:

$$\tau_k(t) = \frac{1}{2}\left[\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)^k + \left(t - \sqrt{t^2-1}\right)^k\right].$$

b) Betrachten Sie den Raum der stetigen Funktionen in $[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

und der zugehörigen Norm $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Zeigen Sie, daß die Polynome $\tau_k(t)$ (für $t \in [-1, 1]$) in diesem Raum orthogonal sind!

Problem 3 **(Unsymmetrischer Lanczos-Algorithmus)**

a) Leiten Sie den unsymmetrischen Lanczos-Algorithmus her. Benutzen Sie hier für die Darstellung von $A \neq A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in Tridiagonalform

$$V^{-1}AV = T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & \dots & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \neq T^T$$

mit einer nicht-singulären Matrix Q. Dabei kann man die Spalten durch

$$V = \left[v_1, \dots, v_n\right], \quad V^{-T} =: W = \left[w_1, \dots, w_n\right]$$

partitionieren und dann $AV = VT$ sowie $A^TW = WT^T$ spaltenweise auswerten (analog zur Herleitung Lanczos & Arnoldi). Unter Ausnutzung der offensichtlichen Biorthogonalitätsbedingung $W^TV = I$ (daher auch der alternative Name *Bi-Lanczos*), sowie den Initialisierungen

$$\gamma_0 v_0 \equiv 0, \quad \beta_0 w_0 \equiv 0$$

erhält man Rekursionsvorschriften für v_k, w_k. Gemäß der Biorthogonalitätsbedingung müssen β_k, γ_k so gewählt werden, dass

$$1 = w_{k+1}^T v_{k+1} = \frac{\tilde{p}_{k+1}^T}{\gamma_k} \frac{\tilde{v}_{k+1}}{\beta_k},$$

mit den unnormierten neuen Basisvektoren $\tilde{w}_{k+1}$, $\tilde{v}_{k+1}$. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten: erzwingen Sie hier entweder $\|v_{k+1}\|_2 = 1$ oder $\|w_{k+1}\|_2 = 1$.

b) Zeigen Sie dass, falls der unsymmetrische Lanczos nicht vorzeitig abbricht,

$$v_k \in \mathcal{K}_k(A, v_1), \quad w_k \in \mathcal{K}_k(A^T, w_1).$$

c) Der unsymmetrische Lanczos-Prozess kann zusammenbrechen (*break down*). Im schlimmsten Fall ist $\tilde{w}_k^T \tilde{v}_k = 0$ mit $\tilde{w}_k \neq 0$, $\tilde{v}_k \neq 0$. Finden Sie für die Beispielmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Startvektoren v_1, w_1 s.d. dieser Fall eintritt.