Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr. Patrick Kürschner, Janna Puderbach

Wintersemester 2018

Einführung Numerische Linear Algebra – Hausaufgabe 3.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis zum 17.11. ein. Die Dateien zu den Programieraufgaben senden Sie bitte an *janna.puderbach@st.ovgu.de*. Der Dateiname sollte Ihren Namen und die zugehörige Hausaufgaben- und Aufgabenummer enthalten, z.B. `name_ha2a4`. Im Fall mehrerer Programmdateien ist die Verwendung eines Dateiarchivierers empfehlenswert. Geben Sie außerdem bitte die Quellcodes Ihrer Programme in ausgedruckter Form zusammen mit den restlichen Aufgaben ab.

Problem 1 **(4 Punkte)** **(CG & Lanczos)**

Wir betrachten nochmal die Verbindung von CG & dem Lanczos-Prozess aus der Vorlesung. Zeigen Sie das $\tilde{T}_k = \triangle_k S_k \triangle_k^{-1}$ symmetrisch ist mit $S_k = \operatorname{tridiag}\left(\frac{-1}{\alpha_{j-1}}, \frac{1}{\alpha_j} + \frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}, -\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right)$ und $\triangle_k = \operatorname{diag}(\|r_0\|, \ldots, \|r_k\|)$ aus der Vorlesung.

Problem 2 **(10 Punkte)** **(MINRES & Lanczos)**

a) Auf der Vorlesungshomepage findet sich die Datei `IndefMatrix.mat`, die eine Matrix A sowie eine rechte Seite b enthält. Die Matrix $A = \left[\begin{smallmatrix} K & B^T \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right]$ liegt in Sattelpunktform da und ist symmetrisch indefinit. Implementieren Sie MINRES basierend auf dem Lanczos-Prozess und lösen Sie das Ausgleichsproblem mit dem backslash-Operator (wir betrachten keine QR-Updates an dieser Stelle). Benutzen Sie Ihre Implementierung für das LS $Ax = b$.

Extra: Nutzen Sie auch den reinen Lanczos-Prozess um $Ax = b$ zu lösen (wie in der Vorlesung beschrieben) und vergleichen Sie mit MINRES.

b) Auf der Vorlesungshomepage findet sich die Datei `Ab_82.mat`, die eine Matrix A sowie eine rechte Seite b enthält. Die Matrix A hat nur zwei verschiedene Eigenwerte -8 und 2. Benutzen Sie das characteristische Polynom von A und die Formel

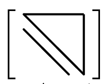
$$r_k = p_k(A) r_0, \quad p_k \in \Pi_k,\ p_k(0) = 1$$

um eine Darstellung für x_k zu erhalten, die nach maximal zwei Matrix-Vektor-Produkten abbricht. Implementieren Sie diese Methode und vergleichen Sie mit `minres` angewandt auf diese Matrix.

c) Zeigen Sie das für die MINRES Residuen gilt $r_k \perp A\mathcal{K}_k(A, r_0)$.

Problem 3 **(4 Punkte)** **(Hessenberg-Reduktion und Krylov-Matrizen)**

Beweisen Sie folgende Verallgemeinerung von Lemma IV.5:
Sei $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, $K(A, V(:,1), n)$ die Krylovmatrix für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist $V^T A V = H$ eine unreduzierte, obere Hessenberg-Matrix genau dann wenn $V^T K(A, V(:,1), n) = R$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix ist.

Hinweis: Eine obere Hessenbergmatrix hat die Struktur $H =$  (Dreicksmatrix plus die erste untere Nebendiagonale). Man nennt H unreduziert, wenn $h_{j+1,j} \neq 0$, $\forall j = 1, \ldots, n-1$.