Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr. Patrick Kürschner, Janna Puderbach

Wintersemester 2018

Einführung Numerische Linear Algebra – Hausaufgabe 1.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis zum 20.10. ein. Die Dateien zu den Programieraufgaben senden Sie bitte an *janna.puderbach@st.ovgu.de*. Der Dateiname sollte Ihren Namen und die zugehörige Hausaufgaben- und Aufgabenummer enthalten, z.B. `name_ha2a4`. Im Fall mehrerer Programmdateien ist die Verwendung eines Dateiarchivierers empfehlenswert. Geben Sie außerdem bitte die Quellcodes Ihrer Programme in ausgedruckter Form zusammen mit den restlichen Aufgaben ab.

Problem 1 **(2 Points)**

Zeigen Sie, dass für die Gauß'sche Elimination mit partieller Pivotisierung angewandt auf $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$L_3P_3L_2P_2L_1P_1 = L_3^{'}L_2^{'}L_1^{'}P_3P_2P_1$$

und definieren Sie die $L_j^{'}$.

Problem 2 **(4 Points)**

Wir betrachten Gauß'sche Elimination (GE), LU-Zerlegung und Pivotisierung zum Lösen von $Ax = b$.

a) Erklären Sie wie GE aus der Vorlesung modifiziert werden kann, s.d. die Transformationen L_i direkt auf die rechte Seite b angewendet werden.

b) Implementieren Sie GE ohne Pivotisierung in MATLAB®.

c) Sei die folgende Matrix gegegeben:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 17 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 18 & -12 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie, ausgehend von Problem 1, die Faktorisierung $PA = LU$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit MATLAB's `lu` Routine.

Lösen Sie $Ax = b$ für die rechte Seite `b=sum(A,2)` mit Ihrer Implementierung und vergleichen Sie mit der Lösung, die mittels MATLAB's `lu` berechnet wurde. Sie können dafür die Norm des Residuums `norm(b-Ax)` oder des Fehlers in beiden Fällen betrachten.

Wiederholen Sie das Experiment mit $a_{11} = 10^{-6}$. Erklären Sie Ihre Beobachtungen.

Problem 3 **(6 Points)**

a) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm im $\mathbb{R}^n$ und $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige reguläre Matrix. Ist durch $\|x\|_G := \|Gx\|$ eine Vektornorm gegeben?

b) Zeigen Sie, dass $\rho(A) \leq \|A\|$ gilt, wobei $\rho(A) := \max\{|z|,\ z \in \Lambda(A)\}$ der *Spektralradius* und $\|\cdot\|$ eine beliebige Operatornorm ist.

c) Beweisen Sie für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Die Abbildung

$$\begin{aligned}(.,.)_A: \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto < x, y > := x^T A y\end{aligned}$$

ist genau dann ein inneres Produkt/Skalarprodukt, wenn A symmetrisch positiv definit (spd) ist.

d) Zeigen Sie, dass spd $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positive Diagonaleinträge haben.

Problem 4 (5 Points)

a) Sei A spd und $G_R := I - \alpha A$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (Iterationsmatrix der Richardson-Iteration aus der Vorlesung). Beweisen Sie dass $\rho(G_R) < 1$ wenn $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}(A)}$ und dass $\min \rho(G_R)$ für $\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\max}(A)+\lambda_{\min}(A)}$ angenommen wird.

b) Wir betrachten das additive Splitting $A = D - L - U$ (D Diagonale, L, U strikter unterer/oberer negativer Dreiecksteil von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$).

Zeigen Sie, dass für $G_J = D^{-1}(L+U)$ (Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens) $\rho(G_J) < 1$ gilt wenn A streng diagonal dominant ist, d.h.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|.$$

Extra: Untersuchen Sie mit $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ und $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix}$ ob stärkere Diagonaldominanz kleinere Spektralradii von G_J impliziert (und damit eine schnellere Konvergenz des Jacobi-Verfahrens).