

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 6.

Problem 1 (4 Punkte)

- Finden Sie die Lagrange-Interpolationsfunktion p_2 vom Grad 2 welche die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ mit den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, und $x_2 = 4$ interpoliert.
- Berechnen Sie den Fehler zwischen $p_2(2)$ und $f(2)$!

Problem 2 (4 Punkte)

Schreiben Sie eine Funktion `lagrange` die anhand eines gegebenen Stützstellenvektors und den dazugehörigen Daten das Lagrange Interpolations-Polynom berechnet. Interpolieren Sie die folgenden Daten der Geburtsstatistik Sachsen Anhalts:

Jahr	Geburten ins.	Jungs	Mädchen
2000	18723	9716	9007
2002	17617	9113	8504
2003	16889	8696	8193
2007	17387	8942	8445
2008	17697	9079	8618
2010	17300	8802	8498
2011	16837	8658	8179
2014	17064	8816	8248

(Hinweis: Wählen Sie die Stuetzstellen als erste Spalte der Tabelle $X(:, 1) - 2000$ und werten Sie später das Interpolations-Polynom am Vektor $0 : 1 : 14$ aus.)

Problem 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Lagrange Basisfunktionen L_j gilt

$$L_j(x) = \frac{l(x)}{l'(x_j)(x - x_j)}$$

mit $l(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$. Leiten Sie zuerst eine Formel für $l'(x)$ her.

Problem 4 (4 Punkte)

Benutzen Sie Ihre Funktion `lagrange` für die Interpolation der Runge Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

auf dem Intervall $[-1, 1]$ für verschiedene Werte von n , dem Polynomgrad, mit äquidistanten Stützstellen. Was beobachten Sie an den Intervallenden? Verwenden Sie nun als Stützstellen

$$x_k = \cos\left(\frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{n + 1}\right) \quad 0 \leq k \leq n,$$

die sogenannten Chebyshev Punkte, für die Lagrange Interpolationsfunktion. Was sehen Sie?

Problem 5 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Chebyshev Punkte (siehe Aufgabe 4) Nullstellen des Chebyshev Polynoms

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1) \arccos(x)) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

sind. Zeigen Sie, dass die folgende Rekursion gilt

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)!$$

(Hinweis: Benutzen Sie die Darstellung von $T_{n+1}(x)$ und $T_{n-1}(x)$.)