Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr.Martin Stoll, Björn Baran

Sommersemester 2016

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 5.

Problem 1 **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für das CG Verfahren mit $M = I$ und $w^{k+1} = r^{k+1}$ gilt:

(a) Zeigen Sie, dass $\left\langle z^{k+1}, q^j \right\rangle_A = 0 \quad \forall j \leq k$. (Hinweis: Es gilt $\left\langle z^{k+1}, q^k \right\rangle_A = 0$ und nehmen Sie an, dass die Induktionsannahme $\left\langle z^k, q^j \right\rangle_A = 0 \quad \forall j \leq k-1$ gilt. Nun zeigen Sie, dass dann auch $\left\langle z^{k+1}, q^j \right\rangle_A = 0$.)

(b) Zeigen Sie, dass $\left\langle r^{k+1}, r^j \right\rangle = 0 \quad \forall j \leq k$. (Hinweis: Es gilt $\left\langle r^{k+1}, r^k \right\rangle = 0$ und nehmen Sie an, dass die Induktionsannahme $\left\langle r^k, r^j \right\rangle = 0 \quad \forall j \leq k-1$ gilt.)

(c) Zeigen Sie, dass $\left\langle q^{k+1}, q^j \right\rangle_A = 0 \quad \forall j \leq k$. (Hinweis: Es gilt $\left\langle q^{k+1}, q^k \right\rangle_A = 0$ und nehmen Sie an, dass die Induktionsannahme $\left\langle q^k, q^j \right\rangle_A = 0 \quad \forall j \leq k-1$ gilt.)

Problem 2 **(4 Punkte)**

Implementieren Sie das CG Verfahren für die Matrix `A=gallery('poisson',n)` für verschieden n, eine zufällige rechte Seite und wählen Sie $M = I$! Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem Jacobi-Verfahren. Was passiert wenn Sie $M = \operatorname{diag}(A)$ wählen im CG Verfahren?
Zusatzaufgabe: Verwenden Sie 5 Schritte des Jacobi-Verfahrens als Vorkonditionierer.

Problem 3 **(4 Punkte)**

Sei G die Vandermonde Matrix. Zeigen Sie, dass $\det(G) = \prod_{i,k=0, i>k}^{n} (x_i - x_k) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=0}^{i-1} (x_i - x_k)$ gilt! (Hinweis: Induktion mit Induktionsanfang $n = 0, 1, 2$ zur Veranschaulichung.)

Problem 4 **(2 Punkte)**

Berechnen Sie mit dem Verfahren `condest(A)` eine Approximation die Konditionszahl der Vandermonde Matrix G für die Polynominterpolation und für verschiedene, nicht zu grosse, Werte von n. Nutzen Sie `help vander` und eine uniforme Verteilung der Stützstellen auf dem Intervall $[0, 1]$.

Problem 5 **(4 Punkte)**

Berechnen Sie die Koeffizienten der Polynominterpolation, wenn Sie die Vandermonde-Matrix invertieren mittels eines direkten Verfahrens. Benutzen Sie dafür

- `x=0:dx:10;y=sin(x);`
- Lösen Sie das Vandermonde System.
- Plotten Sie die Lösung für verschiedene Werte von dx. Nutzen Sie `polyval`.