Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr.Martin Stoll, Björn Baran

Sommersemester 2016

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 3.

Problem 1 **(4 Punkte)**

Implementieren Sie das Cholesky Verfahren und testen Sie dies für die Matrix `A=gallery('poisson',50,50);` Die Matrix A entstammt der Diskretisierung des zweidimensionalen Laplace Operators. Diese Matrix ist schwach besetzt, d.h. die meisten Elemente sind Null. Testen Sie `p=amd(A);`, `L=chol(A,'lower');` und `Lp=chol(A(p,p),'lower');` und plotten Sie die Besetzheitsstrukturen der Matrizen mittels des Befehls `spy(A);`. Was können Sie über die Anzahl der Nichtnullelement (nnz im Spy-Plot) der Matrizen L und Lp aussagen. Was könnte die Ursache sein?

Problem 2 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ faktorisierbar als $A = LU$, wie in der Vorlesung, ist, wenn alle Hauptunterdeterminanten ungleich Null sind

$$\det(a_{i,j})_{i,j=1}^{k} \neq 0 \quad \forall k.$$

(Hinweis: Benutzen Sie Induktion und gehen sie von $A_n = L_n U_N$ aus.

Problem 3 **(4 Punkte)**

Sei eine $n \times n$ Matrix T gegeben

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & & \\ -1 & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Verifizieren Sie die Eigenwerte $\lambda_j = \alpha - 2\cos(j\theta)$ with $\theta = \frac{\pi}{n+1}$ und Eigenvektoren

$$q_j = [\sin(j\theta), \sin(2j\theta), \ldots, \sin(nj\theta)]^T .$$

Wann ist T positiv definit?

Problem 4 **(4 Punkte)**

Sei

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

eine symmetrische Sattelpunktsmatrix. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar und $B \in \mathbb{R}^{m,n}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ BA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B^T \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

mit $S = BA^{-1}B^T$ dem sogenannten Schurkomplement. Nach dem Trägheitssatz von Sylvester folgt, dass kongruente Matrizen die gleiche Anzahl positiver, negativer und Nulleigenwerte haben. Was bedeutet die Faktorisierung für die Eigenwerte der Sattelpunktsmatrix? Geben Sie basierend auf dieser Zerlegung eine explizite Form der inversen Sattelpunktsmatrix an!