Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr.Martin Stoll, Björn Baran
Sommersemester 2016

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 1.

Problem 1 **(4 Punkte)**

Die *inverse Iteration* bezeichnet das Anwenden des Potenzverfahrens mit der inversen Matrix A^{-1}.

1. Bitte schreiben Sie den Algorithmus für diesen Fall auf und benennen Sie die Kriterien für die Konvergenz des Verfahrens. Was ist der Grenzwert?
2. In einer Anwendung sind wir an einem Eigenwert/Eigenvektor in der Nähe von $\sigma \in \mathbb{R}$ interessiert. Modifizieren Sie das Potenzverfahren um diese Werte zu bestimmen.

Problem 2 **(2 Punkte)**

Sei $Q^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine beliebige orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass das Potenzverfahren für die Matrix

$$A = Q\mathrm{diag}(1, 2, 3, \ldots, n-1, n)Q^T$$

langsamer konvergiert als die inverse Iteration angewendet auf die gleiche Matrix. Implementieren Sie beide Verfahren und verifizieren Sie die Konvergenz für verschiedene Werte von n. (Hinweis:diag bezeichnet eine Diagonalmatrix.)

Problem 3 **(3 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für die Eigenwerte λ der transponierten Übergangsmatrix P aus dem google Beispiel in der Vorlesung gilt $|\lambda| \leq 1$. (Hinweis: $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$).

Problem 4 **(6 Punkte)**

(a) Sei A eine $n \times n$ Matrix, mit Einträgen a_{ij}. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ die Summe der Beträge der Nebendiagonaleinträge in Zeile i. Sei $D(a_{ii}, R_i)$ die abgeschlossene Kreisscheibe mit Zentrum a_{ii} und Radius R_i. Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert von A in wenigstens einer der Kreisscheiben $D(a_{ii}, R_i)$ liegt. (Hinweis: Starten Sie mit der Eigenwertbeziehung $Ax = \lambda x$.]

(b) Zeigen Sie mittels der Aussage aus (a), dass

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 30 \end{bmatrix}$$

invertierbar ist.

(c) Es gilt, dass die Vereinigung von Kreisscheiben genauso viele Eigenwerte enthält wie Diagonalelemente der Matrix. Zeigen Sie, dass dann für die Matrix A aus (b) gilt, dass alle Eigenwerte reell sind.