

SYSTEME MIT VERTEILTEN PARAMETERN

IFAT–Vorlesung im SS 2009

Prof. Dr. Dietrich Flockerzi
Max-Planck-Institut
Sandtorstrasse 1
D-39106 Magdeburg

Tel.: 0391-6110-362
email: flockerzi@mpi-magdeburg.mpg.de



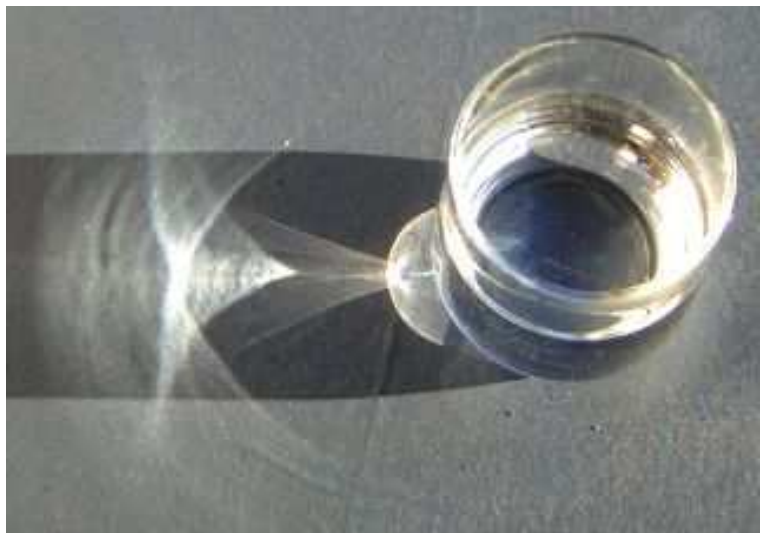
Version: 07. Juli, 2009

KAUSTIKEN

$$u_x^2 + u_y^2 = c^2$$

mit $u(x, y) = 0$

für $x^2 + y^2 = 1$



SVP–HANDOUT (SOMMER 2009)

1	Continuum Mechanics	1
1.1	Hilfsmittel aus der Analysis	1
1.2	Eulerian Description	2
1.3	Energy Conservation and Heat Equation	4
1.4	Applications	6
1.4.1	Convection/Advection (cf. Charakteristikenmethode – App.B)	6
1.4.2	Diffusion	6
1.4.3	Navier-Stokes Equations	6
1.4.4	Transmission of Sound Waves	7
1.4.5	Adiabatic Gas Equations	7
1.4.6	Vibrating String or Membrane	7
1.4.7	Electromagnetism (Maxwell’s Equations)	7
2	Analysis-Grundlagen	11
2.1	Funktionenfolgen – Funktionenreihen	11
2.2	Parameterabhängige Integrale	14
3	Fourier–Analysis	19
3.1	Die schwingende Saite	19
3.2	Fourierreihen	21
3.3	Fouriertransformation	24
4	Die klassischen PDEs	29
4.1	Wellengleichung	29
4.2	Potentialgleichung	29
4.3	Wärmeleitungsgleichung	30
4.4	Sturm–Liouville Randwertprobleme (cf. App A.4)	31
5	Integraltransformationen	33
5.1	Anwendungen der Fourier–Transformation	33
5.1.1	Heuristik	33
5.1.2	PDEs	35
5.1.3	ODEs und Regelungstechnik	37
5.1.4	Integralgleichungen	39
5.1.5	Sampling Theorem	39
5.2	Anwendungen der Laplace–Transformation	40
5.2.1	Heuristik	40
5.2.2	ODEs und Regelungstechnik	41
5.2.3	PDEs	42
5.2.4	Integralgleichungen	44
5.3	Tafeln	44
	Literatur – Aufgaben	47

SVP–HANDOUT (SOMMER 2009)

A	Eigenwerte und Singulärwerte	49
A.1	Grundlagen – Exkurs in Lineare Algebra	49
A.2	Anwendungen der Singulärwertzerlegung (SVD)	52
A.3	Ausgleichsrechnung	56
A.4	Anwendungen auf Differentialgleichungen	57
A.4.1	ODE–Anfangswertprobleme	57
A.4.2	Dirichletprobleme der Wärmeleitungsgleichung	57
A.4.3	Hyperbolic PDE Systems of First Order	60
B	PDEs erster Ordnung: Charakteristikenmethode	63
C	Weak Solutions and Shocks	67
C.1	Weak Solutions – Rankine-Hugoniot Conditions	67
C.2	Riemann-Problems for Quasilinear Systems	70

Keine Angst vor der Kybernetik! Am Ende schaltet sie sich selber aus (S.J.Lec).

Kapitel 1

Continuum Mechanics

1.1 Hilfsmittel aus der Analysis

Satz von Stokes/Green:

$$\int_B \operatorname{div}(f) dx = \int_{\partial B} f \bullet n d\sigma \quad (1.1)$$

für anständiges B in \mathbb{R}^N und \mathbb{R}^N -Funktion $f \in C^1(B) \cap C(\overline{B})$ bei äusserer Normalen n und Oberflächenelement $d\sigma$. Es ergibt sich für die partielle Integration

$$\int_{\partial B} \rho (v \bullet n) d\sigma = \int_B \operatorname{div}(\rho v) dx = \int_B \nabla \rho \bullet v dx + \int_B \rho (\nabla \bullet v) dx$$

für $\rho : B \rightarrow \mathbb{R}$, $v : B \rightarrow \mathbb{R}^3$, insbesondere für $v = \nabla w$ mit $w : B \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_{\partial B} \rho (\nabla w \bullet n) d\sigma = \int_B \operatorname{div}(\rho \nabla w) dx = \int_B \nabla \rho \bullet \nabla w dx + \int_B \rho \Delta w dx$$

■

Satz von Liouville:

$$\dot{Y} = A(t)Y, Y(0) = Y_0 \Rightarrow \det(Y(t)) = \exp\left[\int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) ds\right] \det(Y_0). \quad (1.2)$$

- *Ein direkter Beweis via Determinanten:* Mit $W(t) = \det(Y(t))$ und Spalten Y_j in Y hat man

$$\dot{W} = \det(A Y_1, Y_2, \dots, Y_N) + \dots + \det(Y_1, Y_2, \dots, A Y_N) = \operatorname{tr}(A) W$$

da $\det[(s - A)Y]$ einerseits gleich $\det[s - A] \det[Y] = (s^N - \operatorname{tr}(A)s^{N-1} + \dots) \det[Y]$ und andererseits gleich $\det[(s - A)Y_1, \dots, (s - A)Y_N] = s^N \det[Y] - s^{N-1}(\det(A Y_1, Y_2, \dots, Y_N) + \dots + \det(Y_1, Y_2, \dots, A Y_N)) + \dots$ ist. ■

Allgemeinere Form von Liouville's Theorem (Volumen-Evolution):

Für die Lösung $\Phi(t, x)$ einer glatten Dgl. $\dot{\xi} = v(t, \xi)$ mit Anfangswert $\xi(0) = x$ gilt für die

Funktionaldeterminante $\delta(t) = \det[\Phi_x(t, x)]$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \operatorname{div}(v(t, \Phi(t, x))) \delta, \quad \delta(0) = 1, \\ \text{i.e. } \delta(t) &= \exp\left[\int_0^t \operatorname{div}(v(t, \Phi(t, x))) dt\right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

bei Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen in

$$\frac{d}{dt}\Phi_x = \frac{d}{dx}\Phi_t = \frac{d}{dx}[v(t, \Phi(t, x))] = v_x(t, \Phi(t, x))\Phi_x, \quad \Phi_x(0, x) = \frac{d}{dx}x = I$$

denn aus der Identität $\Phi(t+h, x) = \Phi(t, x) + v(t, \Phi(t, x))h + \mathcal{O}(h^2)$ folgen

$$\delta(t+h) = \delta(t) \det[\Phi_x(t, x)^{-1}] \det[I + v_x(t, \Phi(t, x))h + \mathcal{O}(h^2)] \det[\Phi_x(t, x)]$$

und somit

$$\begin{aligned} \delta(t+h) &= \delta(t) [1 + \operatorname{tr}(v_x(t, \Phi(t, x))h + \mathcal{O}(h^2))], \\ \frac{d}{dt}\delta &= \operatorname{tr}(v_x(t, \Phi(t, x))) \delta(t) = \operatorname{div}(v_x(t, \Phi(t, x))) \delta(t), \quad \delta(0) = 1. \end{aligned}$$

■

Transport Theorem:

Für $B_t = \Phi(t, B_0) = \{x = \Phi(t, \xi) : \xi \in B_0\}$ (bei anständigem $B_0 \subset \mathbb{R}^N$) und skalar- oder vektorwertiges glattes f gilt bei Anwendbarkeit der **Substitutionsregel**

$$\int_{B_t} f(t, x) dx = \int_{B_0} f(t, \Phi(t, \xi)) |\det \Phi_x(t, \xi)| d\xi \quad (1.4)$$

die **Transportgleichung**

$$\frac{d}{dt} \int_{B_t} f(t, x) dx = \int_{B_t} [f_t + f_x v + f \operatorname{div}(v)](t, x) dx, \quad (1.5)$$

was sich im skalaren Fall als

$$\frac{d}{dt} \int_{B_t} f(t, x) dx = \int_{B_t} [f_t + \operatorname{div}(fv)](t, x) dx \quad (1.6)$$

schreiben lässt. Für $f \equiv 1$ hat man daher

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(B_t) = \int_{B_t} \operatorname{div}(v) dx$$

mit Volumenerhaltung im Fall $\operatorname{div}(v) \equiv 0$.

■

1.2 Eulerian Description

Literatur: [11], [12] Appendix B

A continuum may occupy a set $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ and be in motion with a flow $\Phi(t, x)$ generated by a vector field $v(t, x)$:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, x) = v(t, \Phi(t, x)), \quad \Phi(0, x) = x. \quad (1.7)$$

For a nice subset B_0 of Ω we denote $\Phi(t, B_0)$ by B_t and assume $\det(\Phi_x(t, x))$ to be positive. With $\rho = \rho(t, x)$ standing for the mass density the Euler postulates are

(I) Conservation of mass:

$$\frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho(t, x) dx = 0. \quad (1.8)$$

(II) Momentum Equations:

$$\frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho v dx = \mathcal{F} = \text{total force}, \quad (1.9)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{B_t} [x \times \rho v] dx = \mathcal{T} = \text{total torque}. \quad (1.10)$$

Writing $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{ext} + \mathcal{F}_{int}$ with external and internal forces

$$\mathcal{F}_{ext} = \int_{B_t} \rho F dx \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_{int} = \int_{\partial B_t} T n d\sigma$$

we introduce the external force density F and the stress tensor $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ (which may depend on 'everything'). By Green's Theorem one has

$$\mathcal{F} = \int_{B_t} \rho F dx + \int_{B_t} \text{div}(T) dx,$$

where $\text{div}(T)$ stands for the column $(\text{div}(T_{row1}), \text{div}(T_{row2}), \text{div}(T_{row3}))^T$. Writing $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{ext} + \mathcal{T}_{int}$ with external and internal contributions

$$\mathcal{T}_{ext} = \int_{B_t} [x \times \rho F] dx \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_{int} = \int_{\partial B_t} [x \times T n] d\sigma$$

and writing $x \times T n = S n$ one arrives at

$$\mathcal{T} = \int_{B_t} [x \times \rho F] dx + \int_{B_t} \text{div}(S) dx,$$

with $\text{div}(S) = \text{div}(T) + \Delta$ and $\Delta = (T_{32} - T_{23}, T_{13} - T_{31}, T_{21} - T_{12})^T$.

An application of the Transport Theorem in (I) and (II) leads to

$$\rho_t + \rho_x v + \rho \text{div}(v) = 0, \quad (1.11)$$

$$\rho[v_t + v_x v] = \rho F + \text{div}(T), \quad (1.12)$$

$$x \times (\rho[v_t + v_x v]) = x \times (\rho F + \text{div}(T)) + \Delta, \quad (1.13)$$

wher (1.11) is already is used in the derivation of (1.12). Hence Δ needs to vanish (ie. T needs to be symmetric). In this case we are left with the four nonlinear partial differential equations (1.11) (conservation of mass) and (1.12) (momentum equation) for the four unknowns ρ and $v \in \mathbb{R}^3$. One may also write

$$\dot{\rho} + \rho \text{div}(v) = \rho_t + \text{div}(\rho v) = 0, \quad \rho \dot{v} = \rho F + \text{div}(T). \quad (1.14)$$

An assumption like $\rho v = -k \nabla \rho$ in $\text{div}(\rho v)$ leads to $\rho_t = k \Delta u + \nabla k \bullet \nabla \rho$ (diffusion equation, Fourier's or Fick's law!).

The standard form of the stress tensor is

$$T = [-p + \lambda \text{div}(v)] I + \mu [v_x + v_x^T] \quad (1.15)$$

with pressure $p = p(t, x)$ and viscosity coefficient μ in front of the stretching tensor field. In case of fluids one has the cases:

- *perfect* ($\lambda = 0, \mu = 0$), *ideal* ($\text{div}(v) = 0, \mu = 0$), *Navier-Stokes* ($\text{div}(v) = 0, \mu \neq 0$).

The formula for $\text{div}(T)$ for (1.15) is

$$\text{div}(T) = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\text{div}(v)) + \mu\Delta v. \quad (1.16)$$

It enters (1.12) and asks for one more equation (or assumption) for the pressure p .

1.3 Energy Conservation and Heat Equation

As above, suppose a continuum occupies $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ and moves a flow $\Phi(t, x)$ generated by a (convective) vector field $v(t, x)$ with (1.7) – think of $v \equiv 0$ for solids. For subsets B_0 of Ω we denote $\Phi(t, B_0)$ by B_t . Further Legend:

u temperature, e density of internal energy (later on $e = cu$),

f source/sink density, F density for external forces, T symmetric,

$E = \int_{B_t} \rho e \, dx$ internal energy,

$K = \int_{B_t} \rho |v|^2 / 2 \, dx$ kinetic energy,

$W = \int_{B_t} \rho F \bullet v \, dx + \int_{\partial B_t} T n \bullet v \, d\sigma$ work done (mechanical power),

$Q = \int_{B_t} \rho f \, dx - \int_{\partial B_t} J \bullet n \, d\sigma$ heat supply (nonmechanical power).

The second term in the heat supply is to be specified, eg. by Fourier's law $J = -\kappa \nabla u$ (yielding the (diffusive) vector field for the exchange on the surface of B_t (flux!)) or by the alike Fick's law for diffusive mass transfer. The first law of thermodynamics asks for

$$\frac{d}{dt}[E + K] = Q + W. \quad (1.17)$$

By the transport theorem, Green's theorem and (1.11) and (1.12) we can derive the infinitesimal versions in form of PDEs. We obtain

$$\frac{d}{dt}E = \int_{B_t} \rho \dot{e} \, dx.$$

$$\frac{d}{dt}K = \int_{B_t} \rho v^T \dot{v} \, dx = \int_{B_t} v^T (\rho F + \text{div}(T)) \, dx.$$

$$W = \int_{B_t} \rho F \bullet v \, dx + \int_{B_t} \text{div}(Tv) \, dx.$$

$$Q = \int_{B_t} \rho f \, dx - \int_{B_t} \text{div}(J) \, dx.$$

With $\text{div}(Tv) - v^T \text{div}(T) = \text{trace}(Tv_x)$ one arrives at the energy balance (law of energy conservation)

$$\rho \dot{e} = \rho f - \text{div}(J) + \text{trace}(Tv_x). \quad (1.18)$$

With $J = -\kappa \nabla u$ one has

$$\rho [e_t + e_x v] = \rho f + \kappa \Delta u + \text{trace}(Tv_x), \quad (1.19)$$

which reduces in the special case $v \equiv 0$ to

$$\rho e_t = \rho f + \kappa \Delta u$$

In the special case

$$e = cu \text{ (constant } c), \quad \operatorname{div}(v) \equiv 0, \quad T = -pI \quad (1.20)$$

one arrives at

$$\dot{u} = u_t + u_x v = \frac{1}{c} f + \frac{\kappa}{c\rho} \Delta u \quad (1.21)$$

since $\operatorname{trace}(Tv_x) = 0$ (no matter what the pressure is). This is a PDE for the temperature taking into account the convection by the flow Φ and sources/sinks.

REMARK for $v \equiv 0$: With Fourier's law

$$J = \rho e w = -\kappa \nabla u \quad (1.22)$$

for the diffusive vector field w (for the flow of B_t – the flow of 'heat') one has

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho e \, dx &= \int_{B_t} [\rho(e_t + \operatorname{div}(ew))] \, dx = \\ &= \int_{B_t} [\rho c u_t - \operatorname{div}(\kappa \nabla u)] \, dx = \int_{B_t} \rho c [u_t - \frac{\kappa}{c\rho} \Delta u] \, dx . \end{aligned}$$

Thus, the heat equation $u_t = \frac{\kappa}{c\rho} \Delta u$ describes the conservation of energy by asking for $\frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho e \, dx = 0$ along the set B_t flowing according to Fourier's law (1.22) (with vector field w). ■

SUMMARY:

We have obtained five *balancing equations* from the Eulerian postulates and the first law of thermodynamics:

- Mass balance or continuity equation:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (1.23)$$

- Momentum balance or Cauchy's equation (in 3 dimensions):

$$\rho[v_t + v_x v] = \rho F + \operatorname{div}(T). \quad (1.24)$$

In case of $T = -pI$ this can be written as

$$(\rho v)_t + (\rho |v|^2 + p)_x = \rho F.$$

- Energy balance:

$$\rho[e_t + e_x v] = \rho f - \operatorname{div}(J) + \operatorname{trace}(Tv_x). \quad (1.25)$$

reducing for $v \equiv 0$ to $\rho e_t + \operatorname{div}(J) = \rho f$.

These equations still have to be supplemented by the *constitutive equations* which describe the behavior of the materials under investigation (material laws). ■

1.4 Applications

We specialize the above set of equation in various ways:

1.4.1 Convection/Advection (cf. Charakteristikenmethode – App.B)

- **Convection/Advection Problems (Transport Equation):**
 $c_t + \text{div}(cv) = 0$ from mass balance.
- **Attraction/Repulsion/Migration Problems:**
 $c_t + \text{div}(\kappa c \nabla \Psi) = 0$ for a potential function Ψ (eg. electrostatic field charging particles).

Der Theorie derartiger Gleichungen ist Appendix B gewidmet.

1.4.2 Diffusion

- **Diffusion Problems:**
 Fick's Law $J = -\mathcal{D}\nabla c$ in the energy balance leads to the **DIFFUSION EQUATION** $c_t - \text{div}(\mathcal{D}\nabla c) = 0$. Cf. (1.22).
- **Chemotaxis in Microorganisms:**
 $u_t = -\text{div}(\chi u \nabla \Psi) + \text{div}(\mathcal{D}\nabla u)$ with potential Ψ and diffusion coefficient \mathcal{D} .
- **Laplace/Potential Equation:**
 For the pressure u in a fluid with velocity field v in a porous medium one has Darcy's law $v = -p_0 \nabla u$. In the incompressible case ($\text{div}(v) = 0$) one has **POTENTIAL EQUATION** $\Delta u = 0$. For the potential equation in problems of *Ionic Mass Transport* see Prentice [13] pp152 (who ends up with $\text{div}(\kappa(c)\Psi) = 0$ which reduces to $\Delta \Psi = 0$ for constant κ).
- **Propagation Along Axons:**
 For the charge density q and the 'flux' J of charged particles one has $q_t + \text{div}(J) = f = \text{source/sink density}$ (eg. net ionic current I into the axon). With $q = p_2 v$ and $J = -p_3 v_x$ for the voltage v one has $v_t = \kappa v_{xx} + f$.

1.4.3 Navier-Stokes Equations

From (1.14) and (1.16), the Navier Stokes equations are

$$\text{div}(v) = 0, \quad \rho[v_t + v_x v] + \nabla p - \mu \Delta v = \rho F \quad (1.26)$$

with 4 equations and 4 unknowns.

1.4.4 Transmission of Sound Waves

Suppose an *ideal fluid* ($\operatorname{div}(v) = 0, T = -pI$) where one has the **EULER-equations**

$$\rho \dot{v} = \rho[v_t + v_x v] = -\nabla p + \rho F \quad (1.27)$$

from (1.14) and (1.16) (in addition to the mass balance equation in (1.14)). Under the assumption that the terms $v_x v$ and $\rho_t v$ can be neglected and under the (adiabatic) assumption of $\rho = h(p)$ (let's take $\rho = a_0 p$) an application of div to the Euler equation $(\rho v)_t = -\nabla p + F$ and the mass balance equation yield

$$-\Delta p + \operatorname{div}(F) = [\operatorname{div}(\rho v)]_t = [-\rho_t]_t = -a_0 p_{tt}$$

which is a **WAVE EQUATION** for the pressure.

1.4.5 Adiabatic Gas Equations

A reformulation of the energy conservation can be given in terms of entropy conservation $\frac{d}{dt}S(t, x(t)) \equiv 0$. Suppose one has

$$p = f(S)\rho^{1+\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

This implies $\dot{f} = f'(S)\dot{S} = 0$, ie. the entropy conservation takes the form

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^{1+\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^{1+\alpha}} v = 0$$

in addition to the continuity equation (1.23) and the Euler equation (1.27).

1.4.6 Vibrating String or Membrane

The balancing of Newton forces and the sum of the vertical contribution of tension and the vertical load, ie.

$$\int_{B_0} \rho u_{tt} dx = \int_{\partial B_0} T_0 u_x n d\sigma + \int_{B_0} p dx,$$

leads to the **WAVE EQUATION** $\rho u_{tt} = T_0 \operatorname{div}(\nabla u) + p = T_0 \Delta u + p$.

1.4.7 Electromagnetism (Maxwell's Equations)

Let E be the electric, H be the magnetic field, let D and J stand for the electric flow density and the current density resp.. Finally let I denote the magnetic induction. One has Maxwell's Equations, ie. the requirements

$$\begin{aligned} (a) \quad & \operatorname{rot}(E) + I_t = 0 \quad (\text{Faraday}), \\ (b) \quad & \operatorname{rot}(H) = J + D_t, \quad (\text{Ampere}), \\ (c) \quad & \operatorname{div}(D) = \rho \quad (\text{Gauss/Coulomb}), \\ (d) \quad & \operatorname{div}(I) = 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

These can be transformed into a set of wave equations in the following way. Taking *div* of the first two laws is leading to

$$(aa) \quad [div(I)]_t = 0, \quad (bb) \quad div(J) + [div(D)]_t = div(J) + \rho_t = 0.$$

(1.28)(d) is more restrictive than (1.28)(a) and (aa). We consider homogeneous media with $D = \varepsilon E$ and $I = \mu H$ (maybe with $J = \sigma E$ in addition) and thus with

$$\begin{aligned} (a) \quad rot(E) + \mu H_t &= 0, \\ (b) \quad rot(H) &= J + \varepsilon E_t \quad (\Rightarrow 0 = div(J + \varepsilon E_t)), \\ (c) \quad div(\varepsilon E) &= \rho, \\ (d) \quad div(H) &= 0. \end{aligned} \tag{1.29}$$

(i) In case $\rho = 0$ – with $div(E)$ being 0 by (1.29)(c) – one obtains by

$$rot(rot(X)) = \{\nabla(div(X)) - \Delta X\} \tag{1.30}$$

the relation

$$\mu rot(H_t) = -rot(rot(E)) = \Delta E$$

and thus a wave equation for E :

$$\mu \varepsilon E_{tt} = \mu [rot(H) - J]_t = \Delta E - \mu J_t.$$

In an analogous way one receives a wave equation for H :

$$\mu \varepsilon H_{tt} = \Delta H + rot(J).$$

(ii) In the case where ρ is not identically 0:

From (1.29)(d) we can write $H = rot(A)$ (with an integration 'constant' $\nabla\psi$ (gauge freedom)). Inserting into (1.29)(a): $0 = rot(E + \mu A_t)$. Therefore one has

$$E + \mu A_t \equiv -\nabla B$$

with an integration 'constant' ϕ . With (1.30) for A Ampere's equation then becomes

$$\{\nabla(div(A)) - \Delta A\} = J + \varepsilon E_t$$

or

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A) &:= \varepsilon \mu A_{tt} - \Delta A = \\ J - \{\nabla(div(A)) + \varepsilon[\nabla B]_t\} &= J - \nabla \mathcal{D}(A, B), \\ \text{with } \mathcal{D}(A, B) &:= div(A) + \varepsilon B_t. \end{aligned}$$

Equation (1.29)(c) implies

$$\varepsilon \Delta B = -\rho - \varepsilon \mu [div(A)]_t.$$

Thus in case $\mathcal{D}(A, B) \equiv 0$ we have $[\operatorname{div}(A)]_t = -\varepsilon B_{tt}$ and

$$\mathcal{L}(A) = J, \quad \varepsilon \mathcal{L}(B) = \rho. \quad (1.31)$$

So, given A and B with (1.31), we modify them in passing to $\alpha = A + \nabla\psi$ and $\beta = B - \psi_t$ with a ψ such that $\mathcal{D}(\alpha, \beta) = 0$ by taking a solution ψ of the inhomogeneous scalar wave equation

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{D}(A, B). \quad (1.32)$$

We then have $\mathcal{L}(\alpha) = J$ and $\mathcal{L}(\beta) = \rho$ so that

$$H = \operatorname{rot}(\alpha) \quad \text{and} \quad E = -\mu\alpha_t - \nabla\beta \quad (1.33)$$

satisfy Maxwell's equation (1.29). So Maxwell's equations are reduced to three wave equations in (1.31) and (1.32). ■

Kapitel 2

Analysis-Grundlagen

2.1 Funktionenfolgen – Funktionenreihen

Literatur: [1] pp.221–224, [4] pp.146–154

Definition 2.1

Auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ seien die Funktionen $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf I

- (a) *punktweise konvergent*, wenn in jedem Punkt $x \in I$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x)$ existiert,
- (b) *gleichmäßig konvergent* gegen die Grenzfunktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_I = 0$ gilt mit

$$\|f_n - f\|_I := \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Bemerkung 2.2

- (a) $f_n(x) = x^n$ auf $[0, 1]$ konvergiert punktweise gegen die unstetige Grenzfunktion f mit $f(x) = 0$ auf $[0, 1)$ und $f(1) = 1$. Keine gleichmäßige Konvergenz auf $[0, 1]$.
- (b) $f_n(x) = x^n$ auf $[0, 1)$ konvergiert punktweise gegen $f \equiv 0$, aber nicht gleichmäßig. Jedoch liegt gleichmäßige Konvergenz auf jedem kompakten Teilintervall $[0, q]$ mit $0 < q < 1$ vor.
- (c) $f_n(x) = n^{-1/2} \sin nx$ konvergiert auf \mathbb{R} gleichmäßig gegen $f(x) \equiv 0$, aber $f'_n(x) = n^{1/2} \cos nx$ konvergiert (überhaupt) nicht: Differentiation und Limes sind nicht vertauschbar.
- (d) $f_n(x) = \frac{1}{n} [\sqrt{1 + n^2 x^2} - 1]$ konvergiert (monoton) gegen die stetige Grenzfunktion $f(x) = |x|$. $f'_n(x)$ existiert und ist stetig für jedes n , aber die Grenzfunktion ist nicht differenzierbar an $x = 0$.
- (e) $f_n(x) = x/(1 + n^2 x^2)$ konvergiert auf ganz \mathbb{R} gegen die Grenzfunktion $f(x) \equiv 0$ mit $f'(x) \equiv 0$. Die Ableitungen $f'_n(x)$ existieren überall, konvergieren aber gegen 1 an $x = 0$ (und gegen 0 sonst).

- (f) $f_n(x) = n^p x(1-x^2)^n$ (mit $p = 1$ oder 2) konvergiert punktweise auf $[0, 1]$ gegen $f(x) \equiv 0$. Integration und Limes sind aber nicht vertauschbar, denn es gilt (z.B. für $p = 1$)

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \frac{n}{n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

- (g) Für $f_n(x) = x^2(1+x^2)^{-n}$ konvergiert $s_N = \sum_0^N f_n$ für $x \neq 0$ gegen $1+x^2$ (aber gegen 0 an $x = 0$). ■

Satz 2.3 (Stetigkeit)

Konvergiert die Folge der Funktionen $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig auf I und sind die f_n stetig an $p \in I$, so ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig an p .

Insbesondere gilt: Der gleichmäßige Limes f stetiger Funktionen f_n auf I ist stetig. Für jeden Häufungspunkt ξ von I gilt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \xi} f_n(x).$$

Satz 2.4 (Integration)

Konvergiert die Folge der stetigen Funktionen $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig auf dem kompakten $I = [a, b]$, so ist die Grenzfunktion f stetig (und somit integrierbar) und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt.$$

Satz 2.5 (Differentiation)

Die Funktionen $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien auf dem kompakten Intervall $I = [a, b]$ differenzierbar. Konvergiert dann die Folge der Ableitungen (f'_n) gleichmäßig auf I und konvergiert die Folge der Funktionen (f_n) an mindestens einem Punkt $x_0 \in I$, so konvergiert (f_n) gleichmäßig auf I gegen eine differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und für jedes $x \in I$ gilt

$$f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Eine Funktionenreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit} \quad f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$$

ist definitionsgemäß die Funktionen-Folge $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ der Partialsummen. Man verwendet das Symbol auch dann, wenn die Partialsummenfolge divergent ist. Die obigen Konvergenz- und Vertauschungssätze gelten natürlich auch für Reihen. Überdies hat man folgendes einfaches Vergleichskriterium:

Satz 2.6 (Majorantenkriterium)

Ist (f_n) eine Funktionenfolge auf $I \subset \mathbb{R}$ mit $\|f_n\|_I \leq c_n$ (i.e. $|f_n(x)| \leq c_n$ für alle $x \in I$) und konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, so ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf I gleichmäßig konvergent.

Satz 2.7 (Potenzreihen)

Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-p)^k$ besitze einen positiven Konvergenzradius R . Auf jedem kompakten Teil K des Konvergenzintervalls $J := (-R+p, p+R)$ konvergiert sie dann gleichmäßig.

Das *Beispiel* der geometrischen Reihe zeigt, daß gleichmäßige Konvergenz nicht auf dem ganzen Konvergenzintervall gegeben sein muß.

Beispiel 2.8 [Trigonometrische Reihen – [2] 292]

Die Reihe

$$C(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad f_n(x) := \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

konvergiert gemäß 2.6 gleichmäßig und absolut. $C(x)$ ist daher stetig und gleich

$$c(x) := \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

wie sich zeigen wird. Auf \mathbb{R} ist $C(x)$ die gerade 2π -periodische Fortsetzung hiervon. Gliedweise Differentiation von $-C(x)$ führt formal zu

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin(nx)}{n} \quad \text{mit } S_N(0) = 0.$$

Ist gliedweise Differentiation gestattet? Als Grenzfunktion wird sich die 2π -periodische Sägezahnfunktion $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$s(x) := \frac{1}{2}(\pi - x), \quad 0 < x < 2\pi, \quad \text{mit } s(0) := \frac{1}{2}[s(0+) + s(0-)] = 0$$

ergeben. Beachte $s(x) = -c'(x)$ auf $(0, 2\pi)$.

- Die *Dirichlet-Kerne*

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{inx} = 1 + 2\cos x + \cdots + 2\cos(Nx) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$$

für alle $x \neq 2m\pi$ erfüllen $D_N(2m\pi) = 2N + 1$ ($m \in \mathbb{Z}$) wegen der geometrischen Summenformel. Für $0 < x < 2\pi$ dividiert man durch 2, integriert von π nach x und erhält

$$\frac{x-\pi}{2} + S_N(x) = \frac{x-\pi}{2} + \sin x + \cdots + \frac{\sin Nx}{N} = R_N(x) := \int_{\pi}^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2\sin \frac{t}{2}} dt$$

mit

$$|R_N(x)| \leq \frac{1+1}{(2N+1)\sin \frac{x}{2}}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Punktweise an $x \in (0, 2\pi)$ strebt $R_N(x)$ also gegen 0.

- Auf kompakten Teilintervallen $[\rho, 2\pi - \rho]$ hat man wegen der $|R_N|$ -Abschätzung gleichmäßige Konvergenz der Reihe gegen $s(x)$.
- Man hat die Mittelwerteigenschaft für die Grenzfunktion S der S_N :

$$S(x) = \frac{1}{2}[s(x+) + s(x-)].$$

An den Unstetigkeiten verifiziert man dies direkt – sonst Satz 2.3.

- Man hat das **Gibbs–Phänomen** an Unstetigkeitsstellen: Für große N überschwingen die Partialsummen $S_N(x)$ den Sprung von $s(x)$ um etwa 17.89 Prozent (beim Periodenintervall $[0, 2\pi]$). Betrachte dazu $R_N(x)$ nahe $x = 0$ und die erste positive Maximalstelle $\xi_N := \frac{2\pi}{2N+1}$. Für $N \rightarrow \infty$ geht ξ_N gegen 0. Es gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |S_N(\xi_N) - s(0)| = 1.1789... \cdot |s(0+) - s(0)|.$$

- $c(x)$ ergibt sich mit gliedweiser Integration von $S(x) = s(x)$. Die Konstante $-\pi^2/12$ in $c(x)$ ergibt sich aus gliedweiser Integration der $C(x)$ -Reihe über $[0, 2\pi]$, denn deren Integral ist 0. Also muß dies auch für das Integral über $c(x)$ richtig sein.
- Spezielle Reihenwerte: $C(0) = \pi^2/6$, $C(\pi) = \pi^2/12$.

2.2 Parameterabhängige Integrale

Literatur: [1] 430–435, [2] 347

Satz 2.9 (Eigentliche Integrale)

Ist die vom Parameter λ abhängige Funktion

$$f : D = [a, b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, \lambda) \mapsto f(t, \lambda)$$

stetig, so gelten:

(a) $F(\lambda) := \int_a^b f(t, \lambda) dt$ ist auf $[\alpha, \beta]$ stetig.

(b) Existiert überdies die (partielle) Ableitung $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda)$ auf D und ist sie dort stetig, so ist $F(\lambda)$ stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) dt.$$

(c) Satz von Fubini:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(t, \lambda) dt d\lambda = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(t, \lambda) d\lambda dt.$$

Uneigentliche Integrale – z.B. der Form $\int_a^{\infty} f(t, \lambda) dt$ sind als Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\lambda) \quad \text{mit} \quad F_n(\lambda) := \int_a^{b_n} f(t, \lambda) dt \quad (b_n \rightarrow \infty)$$

definiert. Bei gleichmäßiger Konvergenz gegen $F(\lambda)$ kann man dann Differentiation und Limes vertauschen. Eine hinreichende Bedingung bietet der folgende Satz.

Satz 2.10 (Uneigentliche Integrale)

- Die vom Parameter λ abhängige Funktion

$$f : D = [a, b) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, \lambda) \mapsto f(t, \lambda)$$

sei stetig und es existiere eine Funktion $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$|f(t, \lambda)| \leq g(t) \quad \text{auf } D, \quad \int_a^b g(t) dt < \infty.$$

Dann gelten:

- (a) Das uneigentliche Integral $F(\lambda) := \int_a^b f(t, \lambda) dt$ konvergiert und ist stetig:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_a^b f(t, \lambda) dt = \int_a^b f(t, \lambda_0) dt.$$

Überdies liegt Vertauschbarkeit vor:

$$\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(t, \lambda) d\lambda \right) dt = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(t, \lambda) dt \right) d\lambda.$$

- (b) Ist überdies die (partielle) Ableitung $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda)$ ebenfalls auf D stetig und existiert eine Funktion $h : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\left| \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) \right| \leq h(t) \quad \text{auf } D, \quad \int_a^b h(t) dt < \infty,$$

so ist $F(\lambda)$ stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) dt.$$

- Ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dx dy < \infty$, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Beachte: Die gleichmäßige Konvergenz von $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$ für $x \in \mathbb{R}$ reicht i.a. hierfür nicht aus.

Bemerkung 2.11 [Kettenregel] Unter geeigneten Voraussetzungen gilt

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\alpha(\lambda)}^{\beta(\lambda)} f(t, \lambda) dt = f(\beta(\lambda), \lambda) \beta'(\lambda) - f(\alpha(\lambda), \lambda) \alpha'(\lambda) + \int_{\alpha(\lambda)}^{\beta(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) dt.$$

Beispiel 2.12 [Anwendungen]

(a) Ableitung der Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \Rightarrow \Gamma'(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt.$$

(b) Laplace-Transformation (cf. [2] 71):

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

falls das uneigentliche Integral existiert.

- Für $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ ergibt sich $F'(s) = -\int_0^{\infty} e^{-st} \sin t dt = -\frac{1}{1+s^2}$ für $s > 0$ (vgl. Satz 2.10 mit $s \geq s_0 > 0$). Also folgt $F(s) = c - \arctan s$ mit $c = \frac{\pi}{2}$ ($F(\infty) = 0$). Insbesondere gilt $F(0) = \frac{\pi}{2}$.
- Für $f(t) = e^{\mu t}$ mit komplexem μ erhält man $F(s) = \frac{1}{s-\mu}$, falls $\operatorname{Re}(s - \mu) > 0$. Exponentiell beschränkte Funktionen f mit

$$|f(t)| \leq M e^{kt}$$

haben \mathcal{L} -Transformierte für $s > k$, deren Urbildfunktionen bis auf endlich viele Punkte eindeutig bestimmt sind. Unter Umständen erhält man

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0+).$$

Ein Anfangswertproblem

$$\dot{x} + ax = f(t), \quad x(0) = x_0,$$

mit konstanten Koeffizienten kann man \mathcal{L} -transformieren zu

$$(sX - x_0) + aX = F(s),$$

woraus sich

$$X(s) = \frac{F(s) + x_0}{s + a}$$

ergibt. Rücktransformation $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ liefert dann die Lösung (Funktionentheorie!). Man benutzt hierzu Tabellen.

(c) Fourier-Transformation (cf. [2] 350):

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt,$$

falls existent (f muß schnell fallen!). Die Rücktransformation ist dann

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega,$$

falls existent. Man hat

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega), \quad F'(\omega) = \mathcal{F}\{-itf(t)\}.$$

Die Differentialgleichung

$$\dot{x} + ax = f(t), \quad a > 0,$$

führt zu

$$X(\omega) = \frac{1}{i\omega + a} F(\omega) = H(\omega) F(\omega).$$

Für $h(t) = e^{-at}$ für $t \geq 0$ und 0 für $t < 0$ mit $\mathcal{F}\{h\} = H$ gilt dann

$$x(t) = (h * f)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

falls existent (z.B. für $f(t) = e^{-|t|}$ und $a > 1$), was eine Lösung der Differentialgleichung sein sollte. Wodurch ist sie charakterisiert?

Kapitel 3

Fourier–Analysis

3.1 Die schwingende Saite

In diesem Abschnitt berechnen wir formal die Lösung $u(x, t)$ der Wellengleichung (vgl. [2] pp.387)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

über $[0, \pi] \times [0, \infty)$ für $g(x) \equiv 0$ und allgemeines $f(x)$. Der Separationsansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ führt (aus physikalischen und mathematischen Gründen) zu den Gleichungen

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad \ddot{T} + \lambda c^2 T = 0$$

mit den Nebenbedingungen

$$X(0) = X(\pi) = 0, \quad X(x)T(0) = f(x), \quad X(x)\dot{T}(0) = 0.$$

Nichttriviale Lösungen erhält man für $\lambda = \lambda_n = n \in \mathbb{Z}$, nämlich

$$X(x) = X_n(x) = \sin nx.$$

Die entsprechenden T -Lösungen sind dann

$$T(t) = T_n(t) = a_n \cos cnt + b_n \sin cnt.$$

Die n -te Eigenschwingung $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, besitzt die Frequenz cn mit der Amplitude $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Durch Superposition

$$u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

der Eigenschwingungen versucht man nun die Anfangsbedingungen zu erfüllen:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = f(x) , \\ u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n cn \sin nx = g(x) = 0 . \end{aligned}$$

Die beiden Reihen bestehen aus ungeraden Gliedern. Daher denke man sich f ungerade zu einem 2π -periodischen \tilde{f} fortgesetzt. Man multipliziert die Gleichungen mit $\sin mx$ und integriert über $[-\pi, \pi]$ und erhält formal (vgl. Übung 8.4)

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin ns \, ds, \quad b_n = 0.$$

Die *formale Lösung* ist dann

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin ns \, ds \right] \cos cnt = \int_0^{\pi} G(x, t; s) f(s) ds \equiv \mathcal{G}f(x, t)$$

mit der *Kernfunktion*

$$G(x, t; s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cos cnt \sin ns = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [\sin(n(x-ct)) + \sin(n(x+ct))] \sin ns.$$

Für die in der Mitte angezupfte Saite mit

$$f(x) = \beta x \text{ für } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad f(x) = \beta(\pi - x) \text{ für } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

ergeben sich die Amplituden aus den

$$a_n = \frac{4\beta}{n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{4\beta}{\pi} (1, 0, -\frac{1}{9}, 0, \frac{1}{25}, 0, \dots), \quad b_n = 0.$$

Der Ton ist rein, da die Obertöne schnell schwach werden. Der Ton ist weich, da die geraden Oberschwingungen fehlen. Für die am Ende angezupfte Saite mit

$$f(x) = \alpha x \text{ auf } [0, \pi), \quad f(\pi) = 0,$$

ergeben sich die Amplituden aus den

$$a_n = -\frac{2\alpha}{n} \cos n\pi = 2\alpha (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots), \quad b_n = 0.$$

Der Ton ist nicht rein und hart.

Wann ist diese Vorgehen in Ordnung? Es stellen sich folgende Fragen:

- Wann und wo konvergiert die u_n -Reihe? Wo konvergiert sie gleichmäßig?
- Wann konvergiert die Reihe $\sum a_n \sin nx$ mit den angegebenen a_n wirklich gegen f ?
- Wann kann man Integration und Summation vertauschen?
- Wann kann man beim Verifizieren, daß u Lösung ist, Differentiation und Summation vertauschen?
- Ist u die Lösung der Wellengleichung?

3.2 Fourierreihen

Literatur: [2] pp.286-319

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt periodisch, wenn ein $T > 0$ existiert mit $f(t+T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das minimale $T > 0$ nennt man die Periode von f . f heißt dann auch T -periodisch.

Auf $[0, T]$ definierte Funktionen f kann man auf verschiedene Weisen zu T - oder $2T$ -periodischen Funktionen – wieder f genannt – fortsetzen, z.B.

- (a) direkte T -periodische Fortsetzung,
- (b) gerade $2T$ -periodische Fortsetzung,
- (c) ungerade $2T$ -periodische Fortsetzung.

Notationen:

Wir gehen im folgenden stets von mindestens stückweise stetigen 2π -periodischen Funktionen f, g, \dots von \mathbb{R} nach \mathbb{R} oder \mathbb{C} (mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen) aus, denn wir werden Integrationen durchführen. Wir setzen

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Wir definieren

$$\Phi_k(t) := e^{ikt}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

und erhalten die Orthonormalitätsrelationen

$$\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = \delta_{mn}.$$

Definition 3.1

Als *trigonometrisches Polynom* (der Periode 2π) bezeichnet man jede Funktion der Form

$$f(t) = \sum_{k=-N}^N c_k \Phi_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos nt + b_n \sin nt]$$

mit komplexen Koeffizienten c_k, a_n, b_n . Ist $|c_{-N}| + |c_N| \neq 0$ bzw. $|a_N| + |b_N| \neq 0$, so nennt man N den Grad von f . Trigonometrische Reihen schreibt man entsprechend (auch im Falle der Divergenz).

Satz 3.2

Für ein trigonometrisches Polynom f vom Grad N gelten:

- (a) $a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}),$
- (b) $c_k = \langle f, \Phi_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt,$
- (c) $f \equiv 0 \iff c_k = 0, \quad (-N \leq k \leq N),$

(d) f reellwertig $\Leftrightarrow c_k = \overline{c_{-k}}$ ($0 \leq k \leq N$),

(e) f hat höchstens $2N$ Nullstellen in $[0, 2\pi)$.

Beispiel 3.3

(a) $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{int}$ konvergiert für kein einziges t (vgl. Bsp. 2.8).

(b) Aus der geometrischen Reihe erhält man für $|r| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{int} = \frac{[1 - r \cos t] + i r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}.$$

Die Koeffizientenformeln in Satz 3.2 (b) gelten bei gleichmäßiger Konvergenz auch für Reihen (cf. Satz 2.4):

Satz 3.4

Konvergiert eine trigonometrische Reihe $\sum c_k e^{ikt}$ gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ gegen eine Funktion $f(t)$, so ist f auf \mathbb{R} stetig mit $c_k = \langle f, \Phi_k \rangle$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Definition 3.5 (Fourierreihen)

Für stückweise stetiges $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert man die zugehörige Fourierreihe durch

$$\mathcal{S}_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \Phi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$c_k = \langle f, \Phi_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Man hat also: $\mathcal{S}_f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \Phi_k(t - \tau) d\tau = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t - \tau) \Phi_k(\tau) d\tau$.

Sei S_N die N -te Partialsumme von \mathcal{S}_f . Dann gelten aufgrund der Orthonormalität

$$\langle S_N, S_N \rangle = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 = \langle f, S_N \rangle.$$

Daraus folgt $0 \leq \|f - S_N\|_2^2 = \langle f - S_N, f - S_N \rangle = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2$, was folgendes Resultat liefert:

Satz 3.6 (Besselungleichung)

Für jede stückweise stetige Funktion f auf $[0, 2\pi]$ gilt $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$. Insbesondere gelten $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ und $\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n = 0$.

Bemerkung 3.7 [Faltung]

Haben \mathcal{S}_f und \mathcal{S}_g die Fourierkoeffizienten c_k bzw. d_k , so hat die *Faltung von f und g*

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)g(t-s)ds$$

die Fourierkoeffizienten $c_k d_k$. Es gilt also $\mathcal{S}_{f*g} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k d_k \Phi_k(t)$. Dies beweist man durch Vertauschung der auftretenden Doppelintegrale. Die *Dirichlet-Kerne* $D_N(x)$ aus Bsp. 2.8 haben Mittelwert $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = 1$, erfüllen $D_N(0) = 2N + 1$ und erlauben die Darstellung der N -ten Partialsumme der Fourierreihe $\mathcal{S}_f(x)$ als Faltung

$$\mathcal{S}_{f,N}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)dt = (f * D_N)(x).$$

Die *Dirichlet-Kerne* $D_N(x)$ approximieren *irgendwie* den Dirac-Impuls. ■

Wir untersuchen im folgenden, wann die Fourierreihe \mathcal{S}_f gegen f konvergiert.

Satz 3.8 (Vollständigkeit)

Hat eine stückweise stetige, 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die

$$\text{Mittelwerteigenschaft: } f(t) = \frac{1}{2}[f(t-) + f(t+)], \quad t \in \mathbb{R},$$

und gilt $\langle f, \Phi_k \rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so ist $f(t) \equiv 0$. Insbesondere gelten:

- (a) Haben zwei in $[0, 2\pi]$ stückweise stetige Funktionen dieselben Fourier-Koeffizienten und besitzen beide die Mittelwerteigenschaft, so sind sie identisch (Eindeutigkeit).
- (b) Ist f stetig und 2π -periodisch und konvergiert die Fourierreihe \mathcal{S}_f gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$, so gilt $f(t) = \mathcal{S}_f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (c) Für in $[0, 2\pi]$ stückweise stetiges, 2π -periodisches f gilt die

$$\text{Parsevalsche Gleichung: } \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2.$$

- (d) Konvergenz im quadratischen Mittel: Die Fourierreihe \mathcal{S}_f einer auf $[0, 2\pi]$ stückweise stetigen Funktion f konvergiert stets auf $[0, 2\pi]$ im quadratischen Mittel gegen f , d.h. $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\|_2 = 0$.

Die Betrachtungen im Beispiel 2.8 übertragen sich auf beliebige periodische Funktionen, falls die nicht zu *wild* sind.

Satz 3.9 (Darstellungssatz)

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische, stückweise stetig differenzierbare Funktion, für welche in den Ausnahmestellen alle möglichen einseitigen Grenzwerte von f und f' existieren, so gilt für ihre Fourierreihe \mathcal{S}_f :

(a) Ist f stetig auf einem $[a, b]$, so konvergiert dort \mathcal{S}_f gleichmäßig gegen f .

(b) $\mathcal{S}_f(t) = \frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) An jeder Sprungstelle tritt das Gibbs-Phänomen auf (vgl Bsp. 2.8).

Bemerkung: Schreibt man in den Unstetigkeitsstellen den Mittelwert vor, so gilt *praktisch immer* $f = \mathcal{S}_f$.

Satz 3.10 (Abschätzung der F-Koeffizienten)

Ist f 2π -periodisch und sind $f, f', \dots, f^{(m)}$ stetig mit stückweise stetig differenzierbarem $f^{(m+1)}$ (z.B. $f \in C^{m+2}$), so gilt für die Fourierkoeffizienten c_k

$$|c_k| \leq \frac{M}{|k|^{m+2}} \quad (k \neq 0)$$

mit einer Konstanten M - beachte $\langle f', \Phi_k \rangle = ik \langle f, \Phi_k \rangle$.

Bemerkung 3.11 [Lokalisierungssatz]

Stetigkeit von f allein genügt nicht einmal für globale punktweise Konvergenz (du Bois-Reymond, 1873). Vgl. in diesem Zusammenhang Rudin ([3] p.184/5 oder *Real and Complex Analysis*, pp.106-108):

Man hat gemäss Bemerkung 3.7 und Bsp. 2.8

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{f,N}(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(t/2)} \sin((N + \frac{1}{2})t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(t/2)} \cos(t/2) \sin(Nt) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(t/2)} \sin(t/2) \cos(Nt) dt. \end{aligned}$$

Ist nun f Lipschitz-stetig an x [i.e. existieren positive Konstanten δ und L mit $|t| < \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| \leq L|t|$ (beschränkter Differenzenquotient!)], so sind die Faktoren von $\sin(Nt)$ bzw. $\cos(Nt)$ beschränkt. Folglich konvergieren die beiden Integrale gegen 0 für $N \rightarrow \infty$ und man hat punktweise Konvergenz. Daraus ergibt sich der folgende *Lokalisierungssatz* für Fourierreihen:

- Gilt $f(\xi) = g(\xi)$ in einer geeigneten Umgebung von x , so gilt

$$\mathcal{S}_{f,N}(x) - \mathcal{S}_{g,N}(x) = \mathcal{S}_{f-g,N}(x) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Anders als bei Potenzreihen können sich zwei Fourierreihen in einem Intervall gleich verhalten, in einem anderen Intervall jedoch kann ihr Verhalten völlig verschieden sein. ■

3.3 Fouriertransformation

Literatur: [2] pp.337–351 und 393/4

Definition 3.12

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Fourier-transformierbar, wenn

$$F(\omega) := \mathcal{F}\{f(t)\} := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{-i\omega t} f(t) dt$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert. Man schreibt auch kürzer: $\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt$. Die inverse Fourier-transformation von $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ lautet dann

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega.$$

Beispiel 3.13

- (a) Der Rechteckimpuls $f(t) = a$ oder $= 0$ für $|t| \leq b$ bzw. $|t| > b$ hat die \mathcal{F} -Transformation $2ab \frac{\sin \omega b}{\omega b}$.
- (b) Der abfallende Impuls $f(t) = e^{-at}$ für $t \geq 0$ und 0 sonst (mit $a > 0$) führt zu $F(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$, der beidseitig abfallende Impuls $f(t) = e^{-a|t|}$ zu $F(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$. Man sieht: Ist f langsam fallend, so ist F schnell fallend (und umgekehrt).

Insbesondere liefert $f_\varepsilon(t) := e^{-\varepsilon|t|}$ die Funktion $F_\varepsilon(\omega) := \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\omega^2}$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ streben f_ε und F_ε gegen 1 bzw. 0, aber das Integral von F_ε über \mathbb{R} hat Grenzwert 2π :

$$\int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(\omega) d\omega = 2 \arctan \frac{\omega}{\varepsilon} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi.$$

Mit der "Dirac-Delta-Funktion" $\delta(t)$, die man sich durch

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \text{ für } 0 < t < \varepsilon, \quad \delta_\varepsilon(t) = 0 \text{ sonst}, \quad \int_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(t) dt = 1,$$

approximiert denken kann und die vorerst aber nur unter dem Integral im Sinne von

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \delta(t - t_0) dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(t) \delta_\varepsilon(t - t_0) dt$$

benutzt werden sollte [– für stetiges f erhält man den Funktionswert $f(t_0)$ –], folgt

$$\mathcal{F}\{1\} \doteq 2\pi\delta(\omega), \quad \mathcal{F}\{\delta(t - a)\} \doteq e^{-i\omega a}.$$

- (c) Die Heavyside-Funktion $H(t) = 1$ für $t > 0$ und 0 sonst hat die \mathcal{F} -Transformation $\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$. Beachte $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}[H(t) - H(t - \varepsilon)]$.

Bemerkung 3.14 [Rechenregeln]

- (a) Ist f stetig und stückweise stetig differenzierbar und ist f' \mathcal{F} -transformierbar, so gilt mit partieller Integration

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega).$$

Analog gilt: $iF'(\omega) = \int_{\mathbb{R}} i \frac{\partial}{\partial \omega} e^{-i\omega t} f(t) dt = \mathcal{F}\{t f(t)\}$ – vgl. Satz 2.10.

(b) Für das Faltungsprodukt

$$(f * g)(t) := \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds$$

gilt die Produktregel

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(\omega) \cdot G(\omega),$$

falls die auftretenden Integrale Sinn machen – vgl. Satz 2.10.

Analog gilt: $\mathcal{F}\{f(t) \cdot g(t)\} = \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega)$ – vgl. Satz 2.10.

Definition 3.15

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt absolut integrierbar, wenn sie auf jedem endlichen Intervall stückweise stetig ist mit $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt < \infty$.

Satz 3.16 (Konvergenzsatz)

Ist f absolut integrierbar, so existiert $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ für alle ω . F ist stetig und beschränkt auf \mathbb{R} und es gilt die Plancherel-Gleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt.$$

Beachte: F ist nicht notwendig absolut integrierbar.

Satz 3.17 (Fourier-Integraltheorem)

Ist f absolut integrierbar und in jedem endlichen Intervall stückweise stetig differenzierbar, so gilt auf \mathbb{R}

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega x} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt \right) d\omega.$$

Satz 3.18 (Umkehrsatz/Eindeutigkeitssatz)

Ist f absolut integrierbar, in jedem endlichen Intervall stückweise stetig differenzierbar und besitzt f die Mittelwerteigenschaft, dann ist mit $f(t)$ auch $F(\omega)$ \mathcal{F} -transformierbar und es gilt

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\pi}F(-\omega)\right\} = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 3.19

(a) Der RC -Tiefpaßfilter $\rho\dot{x} + x = u(t)$ mit $\rho = RC > 0$ führt bei existenten \mathcal{F} -Transformierten zu

$$X(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\rho}U(\omega) =: H(\omega)U(\omega).$$

Die Übertragungsfunktion $H(\omega)$ ist die \mathcal{F} -Transformierte des einseitig abfallenden Impulses $h(t) = \rho^{-1}e^{-t/\rho}$ für $t > 0$ aus Bsp. 3.13 (b). Man erhält daher die für $t \rightarrow -\infty$ beschränkte Lösung

$$x(t) = (h * u)(t) = \int_{-\infty}^t \rho^{-1}e^{-(t-s)/\rho}u(s)ds.$$

(b) Die Wärmeleitungsgleichung auf dem ganzen x -Raum

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{mit } u(x, 0) = f(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

liefert bei Separationsansatz – bei 'anständigem' f –

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} [a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x)] \exp(-a^2 \lambda^2 t) d\lambda$$

mit den Koeffizienten

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(s) \cos(\lambda s) ds, \quad b(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(s) \sin(\lambda s) ds .$$

Dies läßt sich mit der Kernfunktion

$$G(x, t, s) := \sqrt{\frac{1}{4a^2 \pi t}} \exp\left(-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}\right)$$

auch in der Form $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} G(x, t, s) f(s) ds$ schreiben. Dies sollte für auf dem Abschluß stetige und im Inneren zweimal stetig differenzierbare Funktionen die eindeutige Lösung sein (mit $\lim_{t \searrow 0} u(x, t) = f(x)$).

Zur Herleitung mit der \mathcal{F} -Transformation: Für die Fouriertransformierten gelten

$$U_t = -a^2 \omega^2 U, \quad U(\omega, t) = F(\omega) \exp(-a^2 \omega^2 t).$$

Nun erfüllt $g(\omega) := \mathcal{F}\{\exp(-\beta x^2)\}$ mit $\beta > 0$ die Differentialgleichung $g' + \frac{\omega}{2\beta} g = 0$ mit $g(0) = \sqrt{\pi/\beta}$. Mit $a^2 t = \frac{1}{4\beta}$ gilt:

$$h(x) := \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \Rightarrow H(\omega) := \mathcal{F}\{h(x)\} = \exp(-a^2 \omega^2 t).$$

Also gelten $U(\omega, t) = F(\omega) \cdot H(\omega) = \mathcal{F}\{(f * h)(t)\}$ und $u(x, t) = (f * h)(t)$.

Kapitel 4

Die klassischen PDEs

4.1 Wellengleichung

Die Wellengleichung aus dem ersten Abschnitt hat die formale Lösung

$$\begin{aligned} u_M(x, t) &= \frac{4\beta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin nx \cos cnt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{4\beta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \{ \sin n(x - ct) + \sin n(x + ct) \} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\tilde{f}(x - ct) + \tilde{f}(x + ct)] \end{aligned}$$

für die in der Mitte bzw.

$$u_E(x, t) = -2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi \sin nx \cos cnt$$

für die am Ende angezupfte Saite (cf. d'Alembert-Ansatz). Die *Konvergenz* an $t = 0$ gegen die Anfangsfunktion ist gewährleistet. Die u_M -Reihe konvergiert offensichtlich gleichmäßig. Für die u_E -Reihe könnte dies gemäß Bsp. 2.8 auch der Fall sein (???). Integration und Summation sind dann vertauschbar, so daß die Darstellungen mit der Kernfunktion zulässig sind. Die gliedweise Differentiation ist erscheint nicht gestattet. Die beiden Anfangsfunktionen sind nicht glatt genug. Man sollte ein zweimal stetig differenzierbares \tilde{f} mit stückweise stetig differenzierbarer dritter Ableitung haben (vgl. Satz 3.10). Oder man ersetzt gleich \tilde{f} durch eine Partialsumme seiner Fourierreihe.

4.2 Potentialgleichung

Das Dirichlet-Problem für die *Potentialgleichung* im Kreis ist (vgl. [2] 391)

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 && \text{für } x^2 + y^2 < 1, \\ u(x, y) &= f(x, y) && \text{für } x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

mit einer stetig differenzierbaren reellen Randfunktion f . In Polarkoordinaten lautet dies

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$u(0+, \varphi) \text{ beschränkt, } u(1, \varphi) = g(\varphi) := f(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Man verifiziert, daß $u = u_n(r, \varphi) = r^n e^{\pm in\varphi}$, $n = 0, 1, \dots$, die Differentialgleichung löst. Durch Superposition gelangt man zum Ansatz

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ik\varphi} \quad \text{mit} \quad u(1, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\varphi} \stackrel{!}{=} g(\varphi).$$

Also sollten die c_k die Fourierkoeffizienten von g sein. g sollte dabei in der Tat gleich seiner Fourierreihe \mathcal{S}_g sein. Mit Beispiel 3.3 und Bemerkung 3.7 ergibt sich formal

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(r, \varphi; \psi) g(\psi) d\psi = \mathcal{G}g(r, \varphi), \quad r < 1$$

mit der Kernfunktion

$$G(r, \varphi; \psi) := \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi - \psi) + r^2}.$$

Die Fourierkoeffizienten von u sind $c_k r^{|k|}$. Sie erzeugen für $r < 1$ Glattheit der Lösung, so daß gliedweise Differentiation bzw. Differentiation unter dem Integral gestattet sind. Für welche g gilt $\lim_{r \nearrow 1} u(r, \varphi) = g(\varphi)$?

4.3 Wärmeleitungsgleichung

Die *Wärmeleitungsgleichung* (vgl. [2] pp.383–386)

$$u_t = a^2 u_{xx} + F(x, t), \quad a > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(0, t) = g(t), \quad u(\pi, t) = h(t), \quad t \geq 0$$

über $[0, \pi] \times [0, \infty)$ behandelt man in drei Schritten.

- $F \equiv 0, g \equiv 0, h \equiv 0$:

Hier muß dann auch $f(0) = 0 = f(\pi)$ gelten. Der Separationsansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ führt zu den Gleichungen

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{mit} \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad \dot{T} + \lambda^2 a^2 T = 0,$$

Nichttriviale Lösungen erhält man für $\lambda = n \in \mathbb{Z}$: $X_n(x) = \sin nx$. Die entsprechenden T -Lösungen sind dann $T_n(t) = c_n \exp(-a^2 n^2 t)$. Nach Superposition

$$u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a^2 n^2 t} \sin nx$$

soll gelten:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = f(x).$$

Man errechnet $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin ns \, ds$. Die Lösung $u(x, t) = \mathcal{G}f(x, t)$ ist dann

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin ns \, ds \right] e^{-a^2 n^2 t} = \int_0^{\pi} G(x, t; s) f(s) ds$$

mit der *Kernfunktion*

$$G(x, t; s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \sin ns e^{-a^2 n^2 t}$$

. Die Zeitfaktoren bewirken wieder eine Glättung der Lösung für $t > 0$, falls f am Rand ebenfalls mitsamt seinen Ableitungen verschwindet. Für welche f gilt $\lim_{t \searrow 0} u(x, t) = f(x)$? Dies ist eine Frage der gleichmäßigen Konvergenz.

- $g \equiv 0, h \equiv 0$:

Man bestimmt die Fourier-Sinus-Reihe von F bezüglich x mit den Fourierkoeffizienten $F_n(t)$, was mit dem Ansatz

$$u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$$

zu den Differentialgleichungen

$$\dot{u}_n = -(an)^2 u_n + F_n(t) \text{ mit } u_n(0) = c_n,$$

führt. Deren Lösung ist

$$u_n(t) = e^{-a^2 n^2 t} c_n + \int_0^t e^{-a^2 n^2 (t-\tau)} F_n(\tau) d\tau.$$

- Der allgemeine Fall wird über

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad w(x, t) := g(t) + \frac{x}{\pi} [h(t) - g(t)],$$

auf den letzten Fall zurückgeführt. $v(x, t)$ ist dann als Lösung einer Gleichung mit homogenen Randbedingungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx} + F(x, t) - w_t(x, t), \\ v(x, 0) &= f(x) - w(x, 0), \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

4.4 Sturm–Liouville Randwertprobleme (cf. App A.4)

Diesem Thema ist Section A.4 gewidmet. Vergleiche auch die entsprechenden Aufgaben.

Kapitel 5

Integraltransformationen

Literatur: [8], [2], [10].

5.1 Anwendungen der Fourier-Transformation

Für die grundlegenden Definitionen

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi = \mathcal{F}(f(\cdot))(\lambda) \quad (5.1)$$

und

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda = \mathcal{F}^{-1}(F(\cdot))(x) \quad (5.2)$$

Resultate siehe Abschnitt 3.3 und das Handout zur Vorlesung (Eigenschaften/Tabelle).
Aufgrund der Differentiationsformel

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega) \quad (5.3)$$

und der Faltungsformel

$$(f \star g)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds \Rightarrow \mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \quad (5.4)$$

eignet sich die \mathcal{F} -Transformation für ODEs, PDEs und Integralgleichungen.

5.1.1 Heuristik

(a) Beschränkte ODE-Lösung

Betrachte bei e-stabilem A und beschränktem f

$$u' = \frac{du}{dx} = Au + f(x) \quad (5.5)$$

und suche/bestimme die auf ganz \mathbb{R} beschränkten Lösungen. Multiplikation mit e^{-Ax} und Integration von 0 nach x liefert

$$e^{-Ax}u(x) - u_0 = \int_0^x e^{-A\xi} f(\xi) d\xi. \quad (5.6)$$

Bei beschränktem $u(x)$ folgt für $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^{-\infty} e^{-A\xi} f(\xi) d\xi, \\ u(x) &= \int_{-\infty}^x e^{A(x-\xi)} f(\xi) d\xi = \int_0^\infty e^{As} f(x-s) ds. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Das ist in der Tat die einzige global beschränkte Lösung von (5.5).

(b) **Beschränkte ODE-Lösung (Fourier)**

Betrachte nun den skalaren Fall. Man kann auch (5.5) mit $e^{-i\lambda x}$ multiplizieren und – unter geeigneten Voraussetzungen – über ganz \mathbb{R} integrieren. Bei der partiellen Integration erzwingt man verschwindende Rand-Terme. Es folgen

$$i\lambda \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\lambda x} dx = A \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\lambda x} dx + \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (5.8)$$

oder in Kurzschreibweise

$$i\lambda \hat{u}(\lambda) = A \hat{u}(\lambda) + \hat{f}(\lambda) \quad (5.9)$$

mit Lösung

$$\hat{u}(\lambda) = \hat{h}(\lambda) \hat{f}(\lambda), \quad \hat{h}(\lambda) = \frac{1}{i\lambda - A}. \quad (5.10)$$

Die Rücktransformation $\hat{u}(\lambda) \rightarrow u(x)$ ist i.a. problematisch, hier nicht. Mit der Faltungsregel folgt (5.7). Die an f und u zu stellenden Forderungen sind dabei ziemlich restriktiv.

(c) **Beschränkte PDE-Lösung (Fourier)**

Betrachte nun den skalaren PDE-Fall auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x) \text{ auf } \mathbb{R}, \quad u \text{ global beschränkt.} \quad (5.11)$$

Man multipliziert mit $e^{-i\lambda x}$ und integriert über \mathbb{R} und erhält – unter geeigneten Voraussetzungen –

$$\hat{u}_t(\lambda, t) = (i\lambda)^2 a^2 \hat{u}(\lambda, t), \quad \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{f}(\lambda). \quad (5.12)$$

Die Lösung hiervon ist

$$\hat{u}(\lambda, t) = e^{-a^2 \lambda^2 t} \hat{f}(\lambda). \quad (5.13)$$

Die Rücktransformation $\hat{u}(\lambda, t) \rightarrow u(x, t)$ ist i.a. problematisch, hier nicht.

5.1.2 PDEs

Mit $|f| \in L^1(\mathbb{R})$ und für $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ betrachte man

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ |u(x, t)| &< \infty, \quad u(x, 0) = f(x). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Der Separationsansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ liefert die ODEs

$$\dot{T} + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{5.15}$$

mit Lösungen

$$T(t; \lambda) = \exp(-a^2 \lambda^2 t), \quad X(x; \lambda) = \frac{1}{2\pi} S(\lambda) e^{i\lambda x}.$$

Die formale Summation/Integration liefert den Ansatz

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(t; \lambda) X(x; \lambda) d\lambda$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(x; \lambda) d\lambda \stackrel{!}{=} f(x).$$

Lässt sich $f(x)$ schreiben als

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \mathcal{F}^{-1}(F(\cdot))(x) \tag{5.16}$$

mit \mathcal{F} -Transformierter

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi = \mathcal{F}(f(\cdot))(\lambda) \tag{5.17}$$

(vgl. Satz 2.9), so liefert

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} T(t; \lambda) [F(\lambda) e^{i\lambda x}] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} e^{i\lambda x} e^{-i\lambda \xi} f(\xi) d\lambda d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \xi, t) f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} f(x - z\sqrt{4a^2 t}) dz \rightarrow f(x) \quad \text{für } t \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

mit

$$g(x - \xi, t) = (4\pi a^2 t)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right]. \tag{5.19}$$

Alternativ kann man die \mathcal{F} -Transformation schon direkt auf die PDE (5.14) anwenden und erhält die vom Parameter λ abhängige ODE

$$\dot{U}(\lambda; t) = -a^2 \lambda^2 U(\lambda; t), \quad U(\lambda; 0) = F(\lambda)$$

mit der Lösung

$$U(\lambda; t) = e^{-a^2 \lambda^2 t} F(\lambda) \equiv G(\lambda; t) F(\lambda).$$

Die Rücktransformation des Produkts der λ -Funktionen G und F liefert die Faltung von $g(\cdot; t)$ und $f(\cdot)$, wie sie sich in (5.18) und (5.19) zeigt:

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}U(\cdot; t)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \xi, t) f(\xi) d\xi.$$

Bemerkung 5.1 [\mathcal{F} -Sinus/Cosinus-Transformationen] Schreibt man

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) [\cos \omega t - i \sin \omega t] dt = a(\omega) - ib(\omega), \\ a(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad b(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

mit geradem a und ungeradem b , so gilt

$$\begin{aligned} 2\pi f(t) &= \int_{\mathbb{R}} [a(\omega) - ib(\omega)] \cdot [\cos \omega t + i \sin(\omega t)] d\omega \\ &= 2 \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin \omega t] d\omega. \end{aligned}$$

In einem reellen Ansatz

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda t + B(\lambda) \sin \lambda t] d\lambda \quad (5.20)$$

hat man also Koeffizientenformeln

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\lambda t) dt \quad \text{und} \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\lambda t) dt. \quad (5.21)$$

Beispiel 5.2 [Wärmeleitung auf $[0, \infty)$]

Betrachte auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \\ u(0, t) &= 0, \quad |u(x, t)| \leq M, \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Mit $f^*(x)$ als ungerader Fortsetzung von f betrachte das Ersatzproblem

$$u_t = u_{xx}, \quad |u| \leq M, \quad u(x, 0) = f^*(x), \quad (5.23)$$

wofür \mathcal{F} -Transformation zu $U(\omega, t) = e^{-\omega^2 t} F^*(\omega)$ führt. Mit der Faltungseigenschaft und der Aufspaltung des Integrals auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ ergibt sich – aus Tabelle –

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right] \right\} f(\xi) d\xi. \quad (5.24)$$

Aufgabe (Wellengleichung für $0 < x < \infty$):

Man betrachte für $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \\ u(0, t) &= 0, \quad |u(x, t)| < \infty, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{aligned} \quad (5.25)$$

mit $|f| \in L^1(\mathbb{R})$, $|g| \in L^1(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie eine formale Lösung $u(x, t)$ mit Hilfe einer \mathcal{F} -Transformation nach Bemerkung (5.1). ■

Aufgabe (Potentialgleichung auf Halbraum):

Man betrachte für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \\ |u(x, y)| &< \infty, \quad u(x, 0) = f(x) \end{aligned} \quad (5.26)$$

mit $f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ und $|f| \in L^1(\mathbb{R})$. Nutzen Sie die \mathcal{F} -Transformation bzgl. der x -Variablen, um die Lösung

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x - y \tan \tau) d\tau \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, y > 0$$

mit $u(x, 0+) = f(x)$ herzuleiten. ■

Aufgabe (Transmission Line):

Betrachten Sie

$$\begin{aligned} u_{tt} + \alpha u_t + \beta u &= \gamma^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{aligned} \quad (5.27)$$

mit positiven α, β, γ und $|f| \in L^1$, $|g| \in L^1$. Benutzen Sie die \mathcal{F} -Transformation und berechnen Sie die Lösung der transformierten Gleichungen. ■

5.1.3 ODEs und Regelungstechnik

Gegeben sei ein lineares zeit-invariantes System

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (5.28)$$

mit n -dim. Zustand x , m -dim. Input u und q -dim. Output y . Die Eigenwerte von A mögen alle negativen Realteil besitzen, so dass zu auf \mathbb{R} beschränktem Input $u(\cdot)$ genau ein auf ganz \mathbb{R} beschränkter Zustand/Output

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds \quad / \quad y_p(t) = \int_{-\infty}^t Ce^{A(t-s)} Bu(s) ds$$

gehört, wogegen ein jeder Zustand/Output von (5.28) strebt für $t \rightarrow \infty$ strebt. Verifiziere! Setzt man

$$K(t) = Ce^{At}B \text{ für } t \geq 0, \quad K(t) = 0 \text{ für } t < 0,$$

so hat man die Schreibweise

$$y_p(t) = \int_{\mathbb{R}} K(t-s)u(s)ds$$

in Form einer Faltung. Für $u(t)$ gleich Dirac's $\delta(t-t_0)u_0$ ergibt $y_p(t) = K(t-t_0)u_0$. Daher nennt man K die *Impulsantwortmatrix*. Die \mathcal{F} -Transformierte von $K(t)$, ie.

$$\hat{K}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} K(t)e^{-i\omega t}dt,$$

nennt man *Frequenzgangmatrix*, denn es gilt – bei Input $u(t) = e^{i\omega t}u_0$ –

$$y_p(t) = \int_{\mathbb{R}} K(t-s)e^{i\omega s}u_0ds = e^{i\omega t} \int_{\mathbb{R}} K(\tau)e^{-i\omega\tau}u_0d\tau = \hat{K}(\omega)e^{i\omega t}u_0.$$

Andererseits hat man aus einem Ansatz $y_p(t) = e^{i\omega t}y_0$

$$y_p(t) = C(i\omega - A)^{-1}Be^{i\omega t}u_0 = H(i\omega)u(t)$$

mit der *Übertragungsmatrix*

$$H(s) = C(s - A)^{-1}B$$

und der *Frequenzgangmatrix* $H(i\omega) = \hat{K}(\omega)$.

Bemerkung 5.3 Mit der Plancherelformel (vgl. Satz 3.16) erhält man eine Abschätzung der Energie-Verstärkung, denn es gilt

$$\|y\|_{L^2} \leq \|H\|_{\infty}\|u\|_{L^2}, \quad \|H\|_{\infty} := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |H(i\omega)|,$$

bei $\hat{y}(\omega) = H(i\omega)\hat{u}(\omega)$ wegen

$$\begin{aligned} (y, y)_{L^2} &= \frac{1}{2\pi}(\hat{y}, \hat{y})_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |H(i\omega)|^2 |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega \\ &\leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |H(i\omega)|^2 \frac{1}{2\pi}(\hat{u}, \hat{u})_{L^2} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |H(i\omega)|^2 (u, u)_{L^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 5.4 Im Fall $n = 4$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix},$$

und

$$Bu \approx e_4(b_0, b_1, 1) \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}, \quad C = e_1^T = (1, 0, 0, 0)$$

entspricht (5.28) der ODE

$$x^{(4)} + a_3x^{(3)} + a_2x'' + a_1x' + a_0x = u'' + b_1u' + b_0u \quad \text{mit } y = x.$$

Mit den Polynomen

$$\chi_A(s) = s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0, \quad \chi_B(s) = s^2 + b_1s + b_0$$

ergibt sich so

$$y_p(t) = C(i\omega - A)^{-1} B e^{i\omega t} u_0 = \frac{\chi_B(i\omega)}{\chi_A(i\omega)} e^{i\omega t} u_0$$

mit dem Frequenzgang

$$H(i\omega) = \frac{\chi_B(i\omega)}{\chi_A(i\omega)} = |H(i\omega)| e^{i\phi} \quad \blacksquare$$

5.1.4 Integralgleichungen

Gewisse Integralgleichungen (Faltungen) lassen sich leicht mit \mathcal{F} -Transformationen lösen, zB.

$$\int_{\mathbb{R}} k(t-s)x(s)ds - \lambda x(t) = f(t)$$

führt bei existenten \mathcal{F} -Transformationen zu

$$(\hat{k}(\omega) - \lambda)\hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

und somit zu

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\omega)}{\hat{k}(\omega) - \lambda} e^{-i\omega t} d\omega .$$

5.1.5 Sampling Theorem

Gilt für

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

die Bedingung

$$\hat{f}(\omega) = 0 \quad \text{für } |\omega| > \Omega, \quad (5.29)$$

so lässt sich formal \hat{f} in eine Fourierreihe entwickeln für $-\Omega \leq \omega \leq \Omega$:

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{\mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{in\omega\pi/\Omega},$$

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{-in\omega\pi/\Omega} = \frac{2\pi}{2\Omega} f\left(-\frac{n\pi}{\Omega}\right).$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum_{\mathbb{Z}} f\left(-\frac{n\pi}{\Omega}\right) e^{in\omega\pi/\Omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbb{Z}} f\left(-\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{1}{i(t+n\pi/\Omega)} \exp(i\omega(t+n\pi/\Omega)) \\ &= \sum_{\mathbb{Z}} f\left(-\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t + n\pi)}{\Omega t + n\pi}. \end{aligned}$$

Satz 5.5 (Sampling Theorem)

Erfüllt eine stückweise stetige Spektralfunktion $\hat{f}(\omega)$ die Bedingung (5.29) und ist die sogenannte Abtastfrequenz $\frac{2\pi}{\delta}$ grösser gleich 2Ω , so gilt für die zugehörige Zeitfunktion $f(t)$ obige Darstellung

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\delta) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-n\delta)\right)}{\frac{\pi}{\delta}(t-n\delta)}. \quad (5.30)$$

Es lässt sich also $f(t)$ aus den diskreten Funktionswerten $f(n\delta)$ rekonstruieren für $\delta \leq \frac{\pi}{\Omega}$.

5.2 Anwendungen der Laplace–Transformation

Wir greifen die Laplace–Transformation

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (5.31)$$

aus Beispiel 2.12 wieder auf und verweisen auf das Handout zur Vorlesung (Eigenschaften/Tabelle). Aufgrund der Differentiationsformel

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+) \quad (5.32)$$

und der Faltungsformel

$$(f \star g)(t) \equiv \int_0^t f(t-s)g(s)ds \Rightarrow \mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) \quad (5.33)$$

eignet sich die \mathcal{L} –Transformation für ODEs, PDEs und Integralgleichungen.

5.2.1 Heuristik

Anfangswertprobleme (Laplace)

Betrachte bei $A < 0$ das Anfangswertproblem

$$u' = \frac{du}{dx} = Au + f(x), \quad u(0) = u_0. \quad (5.34)$$

Man multipliziert mit e^{-sx} , $s > 0$, und integriert über $[0, \infty)$ und erhält – unter geeigneten Voraussetzungen – mit partieller Integration

$$u(x)e^{-sx} \Big|_{\infty} - u(0+) + s \cdot \int_0^{\infty} u(x)e^{-sx} dx = A \int_0^{\infty} u(x)e^{-sx} dx + \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \quad (5.35)$$

oder in Kurzschreibweise bei beschränktem u

$$\hat{u}(s) = \frac{u(0+)}{s-A} + \frac{\hat{f}(s)}{s-A}. \quad (5.36)$$

Die Rücktransformation $\hat{u}(s) \rightarrow u(x)$ ist i.a. problematisch, hier nicht. ODEs höherer Ordnung lassen sich leicht Laplace-transformieren und so in algebraische Gleichungen umwandeln. In Analogie auch für PDEs nützlich.

5.2.2 ODEs und Regelungstechnik

In der Regelungstechnik spielt die \mathcal{L} -Transformation eine zentrale Rolle. ODE-Systeme der Form

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (5.37)$$

mit exponentiell stabilem A gehen bei \mathcal{L} -Transformation über in

$$sX - x(0+) = AX + BU, \quad Y = CX, \\ X(s) = (s - A)^{-1}[BU(s) + x(0+)], \quad Y(s) = C(s - A)^{-1}[BU(s) + x(0+)]$$

Von nun an sei der Anfangswert $x(0) = x(0+) = 0$ gewählt – bei beschränkten Inputs streben die Systemantworten asymptotisch gegen die global beschränkte Lösung, so dass der Anfangswert keine bedeutende Rolle bzgl. der asymptotischen Systemantwort hat. Man hat dann

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad \text{mit der Übertragungsmatrix} \quad G(s) = C(s - A)^{-1}B.$$

Einer Reihenschaltung von Systemen S_1 und S_2 vom Typ (5.37) entspricht das Produkt G_2G_1 der Übergangsmatrizen, einer Parallelschaltung die Summe $G_1 + G_2$ und einer Rückführungsschaltung – ausführlich geschrieben als

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1x_1 + B_1v, & y_1 &= C_1x_1, \\ \dot{x}_2 &= A_2x_2 + B_2y_1, & y_2 &= C_2x_2, \\ v &= u - y_2 \end{aligned}$$

entspricht $Y_1 = (I + G_1G_2)^{-1}G_1U$ und $Y_2 = (I + G_2G_1)^{-1}G_2G_1U$ mit der *loop gain matrix* $L \equiv G_1G_2$. ■

Aufgabe (Elektronenbewegung):

Berechnen Sie mit Hilfe von \mathcal{L} -Transformierten die Lösung von

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \dot{y} &= 0, & \dot{y} + \dot{x} &= u, \\ x(0) = \dot{x}(0) &= 0, & y(0) = \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

bei konstantem u . In der (x, y) -Ebene ergibt sich als Lösungskurve eine Zykloide. ■

5.2.3 PDEs

Im Rahmen der PDEs mit konstanten Koeffizienten eignet sich die \mathcal{L} -Transformation für homogene und inhomogene lineare Gleichungen (auch bei inhomogenen Randbedingungen). Das trifft auf endliche und unendliche Randwertaufgaben zu. Vergleiche Abschnitt 4.3.

Beispiel 5.6 [Aufspaltung bei Inhomogenitäten]

Man betrachte auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \\ u(0, t) &= a(t), \quad |u(x, t)| \leq M, \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (5.39)$$

und spalte in die Teilprobleme

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx}, \\ v(0, t) &= a(t), \quad |v(x, t)| \leq M_1, \\ v(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

und

$$\begin{aligned} w_t &= w_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}^+, t > 0 \\ w(0, t) &= 0, \quad |w(x, t)| \leq M_2, \\ w(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (5.41)$$

oder

$$\begin{aligned} w_t &= w_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ |w(x, t)| &\leq M_3, \\ w(x, 0) &= f^*(x) \end{aligned} \quad (5.42)$$

mit der ungeraden Fortsetzung f^* von f .

Mit der \mathcal{L} -Transformation kann man das Problem (5.40), mit der \mathcal{F} -Transformation die Probleme (5.41) bzw. (5.42) angehen. Es ergibt sich für $V(x, s) = \mathcal{L}(v(x, t))$ in (5.40)

$$sV = V_{xx}, \quad V(0, s) = A(s), \quad |V(x, s)| \leq \frac{M_1}{s} \quad (5.43)$$

mit Lösung $V(x, s) = e^{-\sqrt{s}x}A(s)$ und – aus (geeigneter) Tabelle –

$$v(x, t) = \mathcal{L}^{-1}(V(x, s)) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t (t - \tau)^{-3/2} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right] a(\tau) d\tau .$$

Die w -Lösung von (5.42) steht als (5.24) in Beispiel 5.2. Die Lösung von (5.39) ist dann $u = v + w$. ■

Aufgabe (Inhomogene Randbedingungen):

Betrachten Sie die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad x > 0, t > 0, \\ u(0, t) &= f(t), \quad |u| < \infty, \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

Wenden Sie die \mathcal{L} -Transformation (bei 'anständigem' f) an und berechnen Sie die entsprechende Lösung für die transformierten Gleichungen. Anschliessend bestimme man auch die zugehörige Lösung $u(x, t) = \text{heav}(t - \frac{x}{c})f(t - \frac{x}{c})$. ■

Aufgabe (Inhomogenitäten):

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + q(x, t), \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) + \gamma u_x(1, t) = f(t), \\ u(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \quad (5.45)$$

mit Quellterm q . Wenden Sie die \mathcal{L} -Transformation (bei 'anständigen' f , g und q) an und berechnen Sie die entsprechende Lösung für die transformierten Gleichungen. Vergleiche Abschnitt 4.3 zwecks einer eventuellen Aufspaltung in Teilprobleme. ■

Bemerkung 5.7 [Duhamel's Principle]

Wie man Quellterme bei homogenen Anfangsbedingungen mit Hilfe des Duhamelschen Prinzips behandeln kann, zeigen wir exemplarisch an der Wärmeleitung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + q(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Assoziiert man das parameterabhängige Problem

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > \tau, \\ v(x, \tau; \tau) &= q(x, \tau) \end{aligned} \quad (5.47)$$

mit der Lösung $v(x, t; \tau)$, so löst $u(x, t) := \int_0^t v(x, t; \tau) d\tau$ (5.46). Verifiziere!
In Analogie assoziiert man zur Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + q(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

das Problem

$$\begin{aligned} v_{tt} &= v_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > \tau, \\ v(x, 0) &= 0, \quad v_t(x, \tau; \tau) = q(x, \tau), \end{aligned} \quad (5.49)$$

wofür wieder obiger Lösungszusammenhang gilt. Verifiziere! ■

5.2.4 Integralgleichungen

Gleichungen mit Faltungsintegralen wie

$$x(t) + \int_0^t k(t-s)x(s)ds = f(t), \quad t > 0, \quad (5.50)$$

lassen sich \mathcal{L} -transformieren. Die Rücktransformation von $X(s) = \frac{F(s)}{1+K(s)}$ löst (5.50). Z.B. errechnet sich eine Lösung $x(t)$ von

$$\dot{x}(t) + \int_0^t x(s)\cosh(t-s)ds = 0, \quad x(0) = 1 \quad (5.51)$$

mittels der \mathcal{L} -Transformation aus

$$sX(s) - 1 + X(s) \frac{s}{s^2 - 1} = 0, \quad X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^3}$$

als $x(t) = 1 - t^2/2$. ■

5.3 Tafeln

FOURIER-TRANSFORMATION



PROF. DR. DIETRICH FLOCKERZI
 flockerzi@mpi-magdeburg.mpg.de
 Tel. 0391 6110 362
 6. Juli 2006

TAFELN ZUR FOURIER-TRANSFORMATION

- Fourier-Integral:** $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$
- Umkehr-Integral:** $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$
- Äquivalenz:** $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = f(t)$, $\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}\} = F(\omega)$
- Existenz-Bedingung:** $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < M$, $f(t)$ - absolut integrierbar
- Konvergenz in Unstetigkeitsstellen t_i :** $\frac{f(t_i+0) + f(t_i-0)}{2} = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$
- Symmetrie:** $\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$
- Linearität:** $\mathcal{F}\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} = k_1 \mathcal{F}\{f_1(t)\} + k_2 \mathcal{F}\{f_2(t)\}$ $k_{1,2}$ beliebig
- $\mathcal{F}^{-1}\{k_1 f_1(\omega) + k_2 f_2(\omega)\} = k_1 \mathcal{F}^{-1}\{f_1(t)\} + k_2 \mathcal{F}^{-1}\{f_2(t)\}$
- Zeitverschiebung:** $\mathcal{F}\{f(t-b)\} = e^{-j\omega b} F(\omega)$ b reell
- Frequenzverschiebung:** $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega-c)\} = e^{jct} f(t)$ c reell oder komplex
- Differentiation:** $\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n F(\omega)$
 $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}\right\} = (-jt)^n f(t)$
- Integration:** $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \cdot \delta(\omega)$
- Faltungintegrale:** $\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega)F_2(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t)$
 $\mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega-\eta)F_2(\eta) d\eta = F_1(\omega) * F_2(\omega)$
- Parsevalsches Theorem:** $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$
- Systemantwort:** $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega)U(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau) d\tau$

Nr.	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$
1	$\delta(t)$	1
2	$h(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
3	$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
4	1	$2\pi\delta(\omega)$
5	$\cos\omega_0 t$	$\pi\{\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\}$
6	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}\{\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\}$
7	$h(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{2}\{\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\} + \frac{j\omega}{\omega_0^2 + (j\omega)^2}$
8	$h(t)\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{2j}\{\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\} + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (j\omega)^2}$
9	$p_a(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$	$2 \sin a\omega$
10	$e^{-at}H(t)$	$\frac{1}{j\omega} + p_a(\omega)$ (p_a - Spaltfunktion)
11	$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
12	$e^{-at}H(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
13	$e^{-at}H(t)\sin\omega_0 t$	$\frac{a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{-a}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2}$
14	$\frac{t^n}{n!} H(t) e^{-at}$	$\frac{1}{(a + j\omega)^{n+1}}$
15	$h(t)e^{-at}\cos\omega_0 t$	$\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$
16	$h(t)e^{-at}\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$
17	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$, $a > 0$	$2\pi e^{-a\omega^2}$

* z.B. FÖLLINGER, O.: Laplace-, Fourier- und z-Transformation. Hähig 2000.

LAPLACE-TRANSFORMATION



PROF. DR. DIETRICH FLOCKERZI
 flockerzi@mp-magdeburg.mpg.de
 Tel. 0391 6110 362
 6. Juli 2006

HÄNDLETT ZUR LAPLACE-TRANSFORMATION

- Laplace-Integral: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \operatorname{Re}(s) = \sigma > \gamma$
 für $|f(t)| \leq Ke^{\gamma t}$ und K, γ - endlich
- Umkehr-Integral: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$ mit $c > \gamma$
- Linearität: $\mathcal{L}\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} = k_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + k_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}, k_{1,2}$ - beliebig
- Maßabsänderung: $\mathcal{L}\{k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)\} = k_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + k_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$
- Zeitverschiebung: $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ mit $a > 0$, reell
- Frequenzverschiebung: $\mathcal{L}\{h(t-b)f(t-b)\} = e^{-bs} F(s)$ mit $b > 0$, reell
- Integration: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s \pm a)\} = e^{\pm at} f(t)$ mit c - reell oder komplex
- Gewöhnliche Differentiation: $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$
- Verallgemeinerte Differentiation: $\mathcal{L}\{D^n f(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0-) - \dots - f^{(n-1)}(0-)$
- Grenzwertsätze: $\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ (Anfangswert-Satz)
 $\lim_{s \rightarrow 0+} s F(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ (Endwert-Satz, Voraussetzung: $\exists f(t \rightarrow \infty)$)
- Faltungintegral: $\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t)$
- Systemantwort: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau) d\tau = g(t) * u(t)$

Nr.	$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$ $t > 0$ $c \geq \gamma$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \gamma$
1	$\delta(t)$	1
2	$h(t)$ und 1	$\frac{1}{s}$
3	$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
5	$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
6	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
8	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
9	$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
10	$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
11	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
12	$e^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$

DOETSCH, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace- und der z-Transformator Oldenburg 1981.

FÖLLINGER, O.: Laplace- und Fourier- und z-Transformation. Hüthig 2000.

Literaturverzeichnis

- [1] Meyberg, Vachenaue: Höhere Mathematik 1, 2. Auflage, Springer 1997.
- [2] Meyberg, Vachenaue: Höhere Mathematik 2, 2. Auflage, Springer 1997.
- [3] Rudin: Analysis, Physik Verlag 1980.
- [4] Schmieder: Analysis, Oldenburg 1994
- [5] Young N.: An Introduction to Hilbert Space, Cambridge University Press 1988.
- [6] Renardy&Rodgers: An Introduction to Partial Differential Equations, Springer 1992.
- [7] Schecter M.: Principals of Functional Analysis, Academic Press 1971.

- [8] Powers, D.L.: Boundary Value Problems, Academic Press 1972 (5th edition, 2006).
- [9] DuChateaux & Zachmann: PDEs, Schaum's Outline, 1986.
- [10] Farlow: PDEs for Scientists and Engineers, Dover 1993.
- [11] Bähr H.D. & Stephan K.: Heat and Mass Transfer, Springer, 2nd ed., 2006
- [12] Betounes, David: PDEs for Computational Science, Springer Telos 1998.
- [13] Prentice G.: Electrochemical Engineering Principles, Prentice Hall 1991.
- [14] Bressan A.: Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-Dimensional Cauchy Problem, Oxford Univ. Press 2000.

Aufgaben

Die Übungsblätter werden im Verlauf der Vorlesung erstellt und ins Netz gestellt.

Anhang A

Eigenwerte und Singulärwerte

A.1 Grundlagen – Exkurs in Lineare Algebra

Gegeben sei $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ via $x \mapsto Ax$. Betrachte Eigenwert λ mit Rechtseigenvektor $r \neq 0$ (Spalte) und Eigenwert μ mit Linkseigenvektor $\ell^* \neq 0$ (Zeile):

$$Ar = \lambda r, \quad \ell^* A = \mu \ell^* . \quad (\text{A.1})$$

Bei gegebenem Skalarprodukt $(x, y) = y^* x$ definiert man die **adjungierte Abbildung (Matrix)** via

$$\forall x, y \quad (f(x), y) = (x, f^*(y)) \quad [\text{or } (Ax, y) = (x, A^*y)]. \quad (\text{A.2})$$

f bzw. A heisst **normal** im Fall $A^*A = AA^*$, A heisst **selbstadjungiert** im Fall $A = A^*$.

- **Fakt 1**

$$\lambda \ell^* r = \ell^* Ar = \mu \ell^* r \quad (\text{A.3})$$

impliziert: $\lambda \neq \mu \Rightarrow \ell^* r = 0$.

- **Fakt 2**

$$A^*A = AA^* \quad \Rightarrow \quad |Ax - \lambda x|^2 = |A^*x - \bar{\lambda}x|^2 . \quad (\text{A.4})$$

Daraus folgt: $Ar = \lambda r \Leftrightarrow r^*A = \lambda r^*$ (Rechtseigenvektor ist automatisch Linkseigenvektor).

- **Fakt 3**

$$A = A^* \quad \Rightarrow \quad r^* \lambda r = r^* Ar = r^* A^* r = \bar{\lambda} r^* r \quad (\text{A.5})$$

was zeigt, dass selbstadjungierte Matrizen nur reelle Eigenwerte haben.

- **Fakt 4**

$$\begin{aligned} A^*A = AA^*, Ar = \lambda r, Aw = \mu w \quad \Rightarrow \\ \lambda(r, w) = (Ar, w) = (r, A^*w) = (r, \bar{\mu}w) = \mu(r, w). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Das impliziert: Rechtseigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.

• **Fakt 5**

- **ORTHOGONALISIERUNGSVERFAHREN VON E.SCHMIDT/ QR-FAKTORISIERUNG:**

Es sei X ein Vektorraum mit (\cdot, \cdot) , und es sei $A = (a_1, \dots, a_m)$ eine linear unabhängige Menge von Vektoren aus X . Dann existiert eine reguläre obere Dreiecksmatrix $\Delta \in \mathbb{K}^{m,m}$, so daß

$$Q = (q_1, \dots, q_m) = (a_1, \dots, a_m)\Delta = A\Delta$$

folgende Eigenschaften für $j, k = 1, \dots, m$ besitzt:

$$Q^*Q = I, \quad \text{Lin}(q_1, \dots, q_j) = \text{Lin}(a_1, \dots, a_j).$$

Mit der regulären oberen Dreiecksmatrix $R := \Delta^{-1}$ gilt dann $A = QR$.

Zum Beweis setze $q_1 = a_1/|a_1|$ und nehme an, daß q_1, \dots, q_{j-1} mit den gewünschten Eigenschaften schon gefunden sind. Setze dann

$$p_j := a_j - \sum_{k=1}^{j-1} (a_j, q_k)q_k, \quad q_j := p_j/|p_j|.$$

- **SCHURFORM UND SPEKTRALZERLEGUNG:**

Es sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gelten:

- (a) Es existiert eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ (mit $U^*U = I$), so daß $U^{-1}AU = U^*AU$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
Überdies: Ist A reell und sind alle Eigenwerte reell, so ist U reell wählbar.
- (b) A ist normal [i.e. $A^*A = AA^*$] \Leftrightarrow
es existiert ein unitäres $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $U^{-1}AU = U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, also

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^* + \dots + \lambda_n u_n u_n^*, \quad Ax = \lambda_1 u_1(x, u_1) + \dots + \lambda_n u_n(x, u_n).$$

Dies nennt man die **SPEKTRALZERLEGUNG** der Matrix A .

Algorithmischer Beweis der Schur-Form :

Es sei u_1 Eigenvektor von $A_1 = A$ der Länge 1 zum Eigenwert λ_1 . Ergänze mit ‘Schmidt’ zu einer O-Basis $U_1 = (u_1, V_1)$. U_1 ist dann unitär, und es gilt

$$U_1^*AU_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u_1^*AV_1 \\ 0 & V_1^*AV_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_2^* \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Wiederhole diesen Schritt nun für A_2 bezüglich des Eigenwerts λ_2 mit normiertem Eigenvektor $v_2 \in \mathbb{C}^{n-1}$ und unitärem (v_2, V_2) und nehme die (unitäre) (n, n) -Matrix

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (v_2, V_2) \end{pmatrix}.$$

Man hat dann folgendes Zwischenergebnis:

$$U_2^* U_1^* A U_1 U_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Und so weiter. Sind für reelles A alle Eigenwerte reell, so kann U reell gewählt werden.

Ist A normal, so ist $a_2 = 0$ [wegen $|Ax - \lambda x|^2 = |A^*x - \bar{\lambda}x|^2$] und A_2 ist wieder normal. Daraus ergibt sich die eine Richtung in Aussage (b).

Bemerkung:

Über \mathbb{R} hat man für nichtreelle Eigenwerte (2, 2)-Blöcke auf der Diagonalen der Blockdreiecksmatrix U^*AU . ■

• **Fakt 6**

Hat man für allgemeines $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Rechtseigenvektor-Basis $R = (r_1, \dots, r_n)$ ($|r_k| = 1$ o.B.d.A.) zu den Eigenwerten λ_k mit (dualer) Linkseigenvektor-Basis L^* , welche $L^*R = I$ erfüllt ($\Rightarrow L^* = R^{-1}$), so gilt mit $\Lambda = \text{diag}(\lambda_k)$:

$$x = R\xi \quad [\Leftrightarrow \xi = L^*x] \quad \Rightarrow y = Ax = AR\xi = R\Lambda\xi = \sum \lambda_k(x, \ell_k)r_k = \sum \eta_k r_k \quad (\text{A.7})$$

mit der Koordinatenabbildung

$$\xi \mapsto \eta = \Lambda\xi. \quad (\text{A.8})$$

Insbesondere hat man die Ähnlichkeitsbeziehung

$$R^{-1}AR = L^*Ar = L^*R\Lambda = \Lambda. \quad (\text{A.9})$$

Im Spezialfall einer Rechtseigenvektor-Orthonormalbasis (z.B. bei normalem A) ergibt sich $R^*AR = \Lambda$ oder auch in Form der **SPEKTRALZERLEGUNG**

$$A = R\Lambda R^* = \sum \lambda_k P_k, \quad P_k = r_k r_k^*, \quad (\text{A.10})$$

wobei die dyadischen Produkte selbstadjungierte Rang-1 Projektionen sind mit

$$P_k r_k = 1 \cdot r_k, \quad P_k [r_k]^\perp = 0. \quad (\text{A.11})$$

Bei selbstadjungiertem A kann man R (zusammen mit den reellen Eigenwerten) reell nehmen (**HAUPTACHSENTTRANSFORMATION**).

• **Fakt 7**

– **SINGULÄRWERTZERLEGUNG (SVD):**

Für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bezeichne man mit σ_j^2 ($j = 1, \dots, r$) mit $\sigma_1 \geq \dots \sigma_r > 0$ die positiven Eigenwerte von A^*A , die restlichen $n - r$ Eigenwerte σ_j^2 sind 0. Die

$\sigma_j > 0$ ($j = 1, \dots, r$) heißen ‘Singularwerte von A ’.

Es existieren dann unitäre Matrizen $U \in \mathbb{K}^{n,n}$ und $V \in \mathbb{K}^{m,m}$ und eine Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $\Sigma_{jj} = \sigma_j$ für $j = 1, \dots, r$ und $\Sigma_{jk} = 0$ sonst, so daß $A = V\Sigma U^*$ gilt.

Beweis der SVD und Bemerkungen:

Für $A^*Au = \lambda u$ gilt $0 \leq u^*A^*Au = \lambda|u|^2$. Daraus folgt, daß die Eigenwerte von A^*A nichtnegativ sind. Bezüglich einer geeigneten unitären Eigenvektor-Basis

$$U = (U_r, \tilde{U}) = (u_1, \dots, u_r | \dots, u_n)$$

aus Eigenvektoren u_j von A^*A gilt

$$A^*AU = U \text{diag}(D^2, 0), \quad D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r).$$

Wählt man dann eine unitäre Matrix

$$V = (V_r, \tilde{V}) = (v_1, \dots, v_r | \dots, v_m) \in \mathbb{K}^{m,m}, \quad V_r = (v_1, \dots, v_r) = AU_r D^{-1}$$

aus Eigenvektoren von AA^* , so folgen $V^*AU = \Sigma$ und somit

$$A = V\Sigma U^* = V_r [D(U_r)^*] \equiv FG^* . \quad (\text{A.12})$$

Man spricht bei (A.12) von der **SINGULÄRWERT-ZERLEGUNG** $V\Sigma U^*$ und der **FULL-RANK-FACTORIZATION** FG^* von A . Im Fall $m \geq n$ kann man dies mit $V_n := (v_1, \dots, v_n)$ auf die **POLAR-ZERLEGUNG** wie folgt umschreiben:

$$A = V_n \Sigma_n U^* = [V_n U^*] [U \Sigma_n U^*] \equiv WS$$

mit orthonormalem W [$W^*W = I$] und positiv-semidefinitem $S \equiv \sqrt{A^*A}$. Im Fall $m \leq n$ analog: $A = \tilde{S}\tilde{W}$. ■

A.2 Anwendungen der Singulärwertzerlegung (SVD)

(a) Die **MOORE-PENROSE-INVERSE** von $A = V\Sigma U^*$ ist $A^+ = U\Sigma^+V^*$ mit

$$\Sigma^+ \in \mathbb{R}^{n,m}, \quad \Sigma_{jj}^+ = \sigma_j^{-1} \quad \text{für } j = 1, \dots, r, \quad \Sigma_{jk}^+ = 0 \quad \text{sonst.}$$

Das Minimierungsproblem der **AUSGLEICHSRECHNUNG** für $Ax = b$ (cf. Section A.4) lässt sich mit SVD elegant lösen: $x_{opt} = A^+b$.

(b) $\det(A) = \Pi\sigma_j$.

(c) **SPEKTRALMATRIXNORM** $\|A\| \equiv \max\{|Ax|_2 : |x|_2 = 1\} = \sigma_1$.

(d) Für **FROBENIUSNORM**: $\|A\|_F^2 \equiv \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_j \sigma_j^2 = \text{spur}(A^*A) = \text{spur}(AA^*)$.

- (e) **KONDITION** regulärer Matrizen: $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = \sigma_{max}/\sigma_{min}$.
- (f) Das Bild der Einheitskugel $\mathcal{B} = \{x : |x|_2 = 1\}$ unter A ist ein Ellipsoid um 0 mit den Hauptachsen $\sigma_j v_j$ (**HAUPTACHSENTTRANSFORMATION**).
- (g) **ROBUSTHEIT**: Für reguläres $A = V\Sigma U^*$ und $\|B\| < \sigma_n$ ist $A + B$ regulär, für $B = -\sigma_n v_n u_n^*$ mit $\|B\| = \sigma_n$ ist $A + B$ singulär.

Zum Beweis der ersten Aussage beachte man

$$F := -V^* B U \Sigma^{-1} \rightarrow \|F\| \leq \|B\| \cdot \|\Sigma^{-1}\| = \|B\| \cdot \sigma_n^{-1} < 1.$$

Aus $A + B = V(I - F)\Sigma U^*$ und der Invertierbarkeit aller vier Faktoren folgt die Regularität von $A + B$. Die Eigenwerte von F haben Betrag < 1 , die Inverse von $I - F$ ist durch die Neumann-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} F^k$ gegeben.

- (h) **LOW-RANK-APPROXIMATIONS**:

Für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ seien $\sigma_1 \geq \dots \sigma_r > 0$ die positiven Singulärwerte von A mit

$$A = V\Sigma U^* = \sum_{j=1}^r \sigma_j v_j u_j^*.$$

Dann ist für $k < r$ die Matrix

$$A_k = \sum_{j=0}^k \sigma_j v_j u_j^* \equiv V_k \Sigma_k U_k^* \quad (\text{A.13})$$

die beste Approximation vom Rang k im Sinne

$$\|A - A_k\|_2 = \min\{\|A - B\| : \text{rang}(B) = k\}.$$

Weiter gilt natürlich $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$.

Beweis (Low-Rank-Approximations):

Man schreibe $A = A_k + R$ mit $R = \sum_{j=k+1}^r \sigma_j v_j u_j^*$ und $\|R\|_2 = \sigma_{k+1}$. Eine jede Matrix B vom Rang k ist der Nullraum $n - k$ -dimensional. Der von u_1, \dots, u_{k+1} aufgespannte Raum W ist $(k + 1)$ -dimensional. Daher gibt es einen Einheitsvektor $w \in W \cap N(B)$ und es gilt

$$\|A - B\|_2^2 \geq |(A - B)w|_2^2 = |Aw|_2^2 = |\Sigma U^* w|_2^2 \geq \sigma_{k+1}^2 |U^* w|_2^2 = \sigma_{k+1}^2 \quad \blacksquare$$

- (i) **PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS**:

Gegeben sei eine Daten-Matrix $X \in \mathbb{R}^{m,n}$ vom Rang r mit Spaltensummen $e_j^* X = 0$, wobei o.B.d.A. $m \geq n$ sei. Die Kovarianzmatrix ist dann

$$\text{cov}(X) = \frac{1}{m-1} X^* X = A^* A, \quad A = \frac{1}{\sqrt{m-1}} X.$$

Mit der SVD von $A = V\Sigma U^*$ gilt dann

$$X = \sqrt{m-1} V\Sigma U^* = \sum_{j=0}^r \sqrt{m-1} \sigma_j v_j u_j^*.$$

Die *Low-Rank-Approximations* A_k von A aus (A.13) liefern dann k -dimensionale Approximationen der Datenmatrix X , der Fehler² in 2-Norm ist $(m-1)\sigma_{k+1}^2$. Man kann den Fehler² natürlich auch mit Frobenius messen, wo er gleich $(m-1)(\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_r^2)$ ist.

- Gegeben sei eine Spalte $b = Ae_s$ von A . Mit Ausgleichsrechnung kann man den Projektionspunkt

$$\pi b = A_k e_s \in R(A_k)$$

im A_k -Ellipsoid und den Abstand

$$|b - \pi b|_2 = |Re_s|$$

von b zum PC-Modell $R(A_k)$ ermitteln. Das ist klar wegen $Ae_s = A_k e_s \oplus Re_s$. Ein grobes Mass liefert die Frobeniusnorm von A_k bzw. R .

- Gegeben sei ein $b \in \mathbb{R}^m$ mit Spaltensumme 0 (sinnvollerweise?). Mit Ausgleichsrechnung kann man den Projektionspunkt

$$\pi b = A_k(A_k)^+ b = V_k V_k^* b \in R(A_k)$$

und den Abstand

$$|b - \pi b|_2 = |(I - V_k V_k^*)b|_2$$

von b zum PC-Modell $R(A_k)$ ermitteln. Wo liegt πb in Bezug auf das A_k -Ellipsoid, auf dessen Rand die projizierten Spalten von A liegen?

- Setze $J_1^* = (I_k, 0^{k \times (m-k)})$ und $J_2^* = (I_k, 0^{k \times (n-k)})$ und setze $P_j = J_j J_j^*$. Mit $V_k = V J_1 \in \mathbb{R}^{n,k}$, $\Sigma_k = J_1^* \Sigma J_2 \in \mathbb{R}^{k,k}$ und $U_k^* = J_2^* U^* \in \mathbb{R}^{k,n}$ hat man dann

$$A = A_k + R = V_k \Sigma_k U_k^* + R, \quad R = A - A_k = V(\Sigma - P_1 \Sigma P_2) U^* . \quad (\text{A.14})$$

Daraus folgt

$$RR^* = V \Sigma (I - U_k U_k^*) \Sigma^* V^* = AU(I - U_k U_k^*)(AU)^* = A(I - U_k U_k^*)A^* \quad (\text{A.15})$$

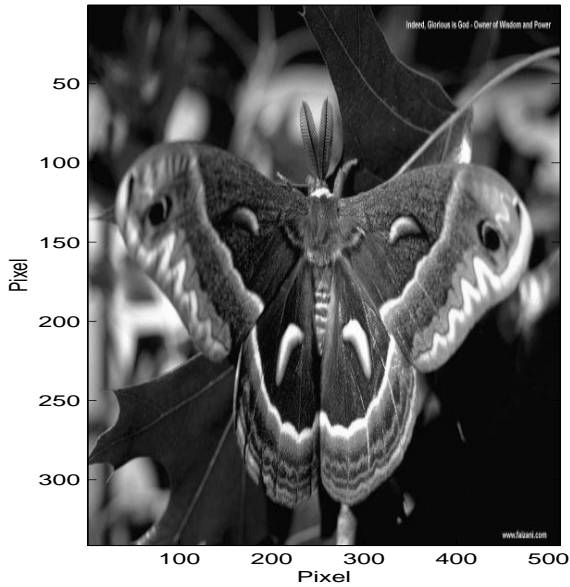
mit Frobeniusnorm $\|R\|_F^2 = \text{spur}(RR^*) = \sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_r^2$. Analog ergeben sich

$$A_k A_k^* = V_k \Sigma_k^2 V_k^*, \quad A_k^* A_k = U_k \Sigma_k^2 U_k^* \quad (\text{A.16})$$

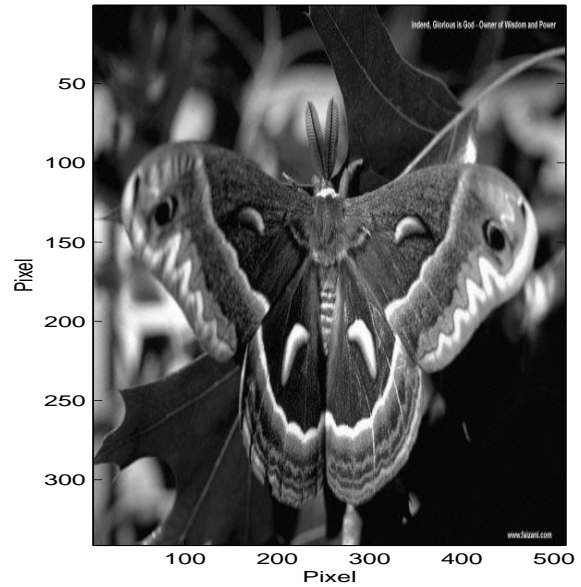
mit Spur gleich $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2$.

Vegleiche auch *Hotelling T^2 -Statistik*. ■

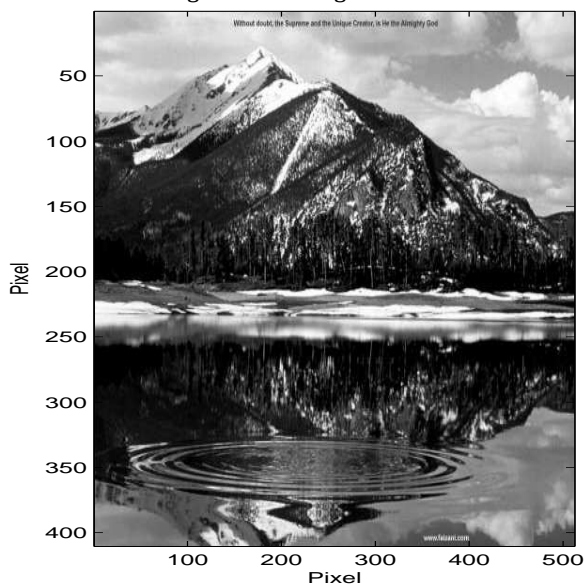
Originalabbildung -- 341 Moden



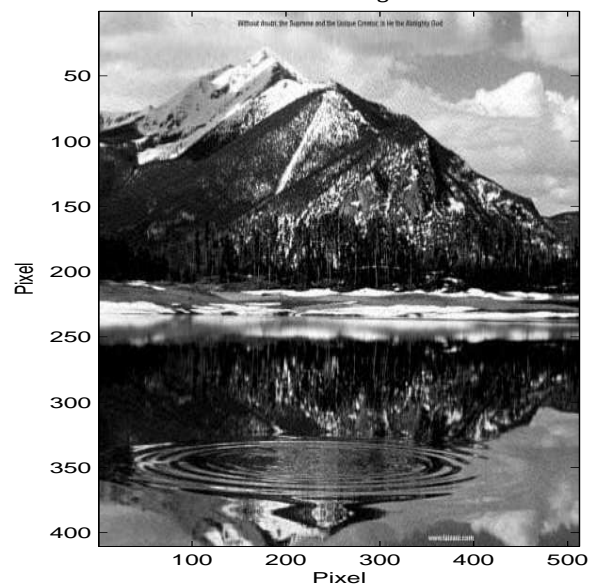
rekonstruierte Abbildung -- 170 Moden



Originalabbildung -- 410 Moden



rekonstruierte Abbildung -- 111 Moden



A.3 Ausgleichsrechnung

Gegeben sei ein System Φ linear unabhängiger Vektoren $(\Phi_k)_{k=1}^K$ in einem Skalarproduktraum V . Sei $A = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)$ ein endliches Teilsystem. Ziel ist es, ein gegebenes $f \in V$ möglichst gut mit einem Element Ac zu approximieren im Sinne eines minimalen Fehlerquadrats $\|f - Ac\|^2$. Wie ist ein Minimierer c_* mit

$$\|f - Ac_*\|^2 \leq \|f - Ac\|^2 \quad \forall c \quad (\text{A.17})$$

zu bestimmen? Einen Kandidaten erhält man aus der Lotbedingung 'Fehler \perp Bild(A)', also aus

$$(f - Ac, \Phi_j) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall j = 1, \dots, N. \quad (\text{A.18})$$

Dies lässt sich schreiben als

$$(f, \Phi_j) = (Ac, \Phi_j) = \sum (\Phi_k, \Phi_j) c_k \quad \text{oder} \quad F = Mc \quad (\text{A.19})$$

mit Matrix $M = M_{j,k} \equiv ((\Phi_k, \Phi_j))$ und Spaltenvektor F (Komponenten $F_j = (f, \Phi_j)$). M ist invertierbar (verifiziere!). Daher ist die Lösung von (A.19) gegeben durch $c = c_* = M^{-1}F$. Im Fall eines Orthonormalsystems A ist M die Einheitsmatrix ($\Rightarrow c_* = F$).

Betrachte nun c 's der Form $c = c_* + \delta$ und

$$\begin{aligned} \|f - Ac\|^2 &= \|(f - Ac_*) - A\delta\|^2 = \\ &= \|(f - Ac_*)\|^2 - (f - Ac_*, A\delta) - (A\delta, f - Ac_*) + \|A\delta\|^2 = \\ &= \|(f - Ac_*)\|^2 + \|A\delta\|^2 \geq \|(f - Ac_*)\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

wegen (A.19) mit Gleichheit genau für $\delta = 0$. Das besagt:

- c_* ist in der Tat der Minimierer des Fehlerquadrats.
- $\|(f - Ac_*)\|^2 = \|f\|^2 - (f, Ac_*) - (Ac_*, f) + \|Ac_*\|^2 = \|f\|^2 - \|Ac_*\|^2$ wegen (A.19) (ie. $(f - Ac_*, Ac_*) + (Ac_*, f - Ac_*) = 0$). Dies ist die Aussage des Pythagoras (Bessel/Parseval)

$$\|f\|^2 = \|Ac_*\|^2 + \|(f - Ac_*)\|^2$$

mit dem Lotfußpunkt Ac_* und dem 'Fehler' $(f - Ac_*)$.

Der Sonderfall einer Orthonormalbasis Φ liefert die schönen Formeln $f = \sum_{k=1}^K (f, \Phi_k) \Phi_k$ und

$$\begin{aligned} (c_*)_j &= (f, \Phi_j), \\ Ac_* &= \sum_{j=1}^N (f, \Phi_j) \Phi_j, \\ f - Ac_* &= \sum_{j=N+1}^K (f, \Phi_j) \Phi_j, \\ \|f - Ac_*\|^2 &= \sum_{j=N+1}^K |(f, \Phi_j)|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Hierbei ist es gleichgültig, ob man \mathbb{R}^K , \mathbb{C}^K oder den L^2 der Fouriertheorie betrachtet. ■

A.4 Anwendungen auf Differentialgleichungen

A.4.1 ODE–Anfangswertprobleme

Wir betrachten ODE–Anfangswertprobleme der Form

$$\dot{u} = Au, \quad u(0) = c \quad (\text{A.22})$$

im \mathbb{R}^n mit Skalarprodukt $(x, y) = y^*x$, Rechtseigenvektor-Basis $R = (r_1, \dots, r_n)$, Linkseigenvektor-Basis $L^* = (\ell_1, \dots, \ell_n)^*$ (mit $L^*R = I$) zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gilt mit $\Lambda = \text{diag}(\lambda_k)$:

Schreibt man

$$u = u(t) = R\alpha(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)r_j, \quad c = R\gamma \quad [\gamma = L^*c, \quad \gamma_k = (c, \ell_k)],$$

und multipliziert man mit L^* von links (i.e. bildet man komponentenweise in (A.22) das Skalarprodukt mit ℓ_k), so ergibt sich

$$\dot{\alpha} = L^*R\dot{\alpha} = L^*\dot{u} = L^*AR\alpha = \Lambda\alpha \quad [\dot{\alpha}_k = \lambda_k\alpha_k],$$

mit Lösung

$$\alpha = e^{\Lambda t}L^*c \quad [\alpha_k(t) = e^{\lambda_k t}(c, \ell_k)].$$

Insgesamt erhält man so die Lösung

$$u(t) = Re^{\Lambda t}L^*c = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t}r_k(c, \ell_k). \quad (\text{A.23})$$

Im Fall einer reellen symmetrischen Matrix ist R als Orthonormalmatrix wählbar mit $L^* = R^*$ und (A.23) wird zu

$$u(t) = Re^{\Lambda t}R^*c = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t}r_k(c, r_k). \quad (\text{A.24})$$

Bemerkung: Da es sich hier immer nur um endliche Summen handelt, treten keine Konvergenzfragen auf und Vertauschungsprozesse von Summation und Differentiation sind gestattet.

A.4.2 Dirichletprobleme der Wärmeleitungsgleichung

Für Dirichletprobleme der Wärmeleitung–PDE

$$\dot{u} - Lu = 0, \quad u(0, x) = c(x) \quad \text{über } [0, \pi], \quad (\text{A.25})$$

mit

$$Lu(t, x) = u_{xx}(t, x) \quad (\text{A.26})$$

für C^2 –Funktionen u und homogenen Randbedingungen

$$u(t, 0) = 0 = u(t, \pi) : \quad (\text{A.27})$$

(a) Wir bestimmen erst t -unabhängige Funktionen $v = v(x)$ mit

$$\mathcal{L}v := -v_{xx} = \lambda v, \quad v(0) = 0 = v(\pi), \quad (\text{A.28})$$

sozusagen *Eigenwerte* λ und *Eigenvektoren* $v = \Phi(x)$ der linearen Abbildung \mathcal{L} . Bekanntlich folgt

$$\lambda = \lambda_n = n^2, \quad v = \Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx),$$

wobei der Vorfaktor der Normierung dienen wird. Man versucht, diese Eigenfunktionen die Rolle der Orthonormalbasis übernehmen zu lassen und zwar bzgl. des Skalarprodukts

$$(f, g) = \int_0^\pi \bar{g}(x) f(x) dx \quad (\text{A.29})$$

für Funktionen f, g , für die das Integral existiert. Es gilt nun (in der Tat) $(\Phi_j, \Phi_k) = \delta_{jk}$, was die Orthonormalität der Eigenvektoren Φ_k bzgl. des Skalarprodukts (A.29) belegt.

Allgemeiner und ohne explizite Berechnung der Eigenwerte/Eigenvektoren:

- Man hat

$$u \mathcal{L}v - v \mathcal{L}u = -[(uv' - vu')']$$

und somit 'Selbstadjungiertheit':

$$\begin{aligned} (u, \mathcal{L}v) - (\mathcal{L}u, v) &= \int [\mathcal{L}\bar{v}u - \bar{v}\mathcal{L}u] dx = \\ &= \int [-(u\bar{v}' - \bar{v}u')] dx = -(u\bar{v}' - \bar{v}u') \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

- Weiterhin gilt für $\phi = u = v$ mit (A.28):

$$0 = (\mathcal{L}\phi, \phi) - (\phi, \mathcal{L}\phi) = -[(\lambda\phi, \phi) - (\phi, \lambda\phi)] = -(\lambda - \bar{\lambda})(\phi, \phi).$$

Mit $(\phi, \phi) > 0$ folgt dass λ reell sein muss.

- Aus $\mathcal{L}\phi = \lambda\phi$ und $\mathcal{L}\psi = \mu\psi$ folgt $0 = (\mathcal{L}\phi, \psi) - (\phi, \mathcal{L}\psi) = (\lambda - \mu)(\phi, \psi)$. Aus $\lambda - \mu \neq 0$ folgt daher Orthogonalität $[(\phi, \psi) = 0]$.
- Eine Abschätzung der (reellen) Eigenwerte bei reellen Eigenfunktionen Φ ergibt sich mit partieller Integration aus

$$\int \lambda |\Phi|^2 dx = \lambda(\Phi, \Phi) = (\mathcal{L}\Phi, \Phi) = -\int \Phi'' \Phi dx = -[0 - \int \Phi' \Phi' dx] > 0.$$

Die Eigenwerte sind also positiv.

- FRAGE: Bilden die Φ_k auch in einem geeigneten Sinne eine *Basis von ???*, ja wovon?

(b) Formal geht's weiter wie oben im ODE-Fall: Man schreibt

$$u = u(t, \cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(t) \Phi_j(\cdot) \quad (\text{Konvergenz (???)})$$

und bildet in (A.25) das Skalarprodukt mit Φ_k , so ergibt sich (bei gliedweiser Differentiation (???)) wieder $\dot{\alpha}_k = \lambda_k \alpha_k$ mit Lösung $\alpha_k(t) = e^{\lambda_k t} \beta_k$.

(c) Damit die Anfangsbedingung erfüllt ist, muss

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0) \Phi_k(\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \Phi_k(\cdot) = c(\cdot)$$

gelten. Schreibt man $c = c(x)$ bzgl. der Eigenvektorbasis als

$$c(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) \gamma_k \tag{A.30}$$

(hinreichend 'viele' Φ_k (???)), so folgt durch eine Skalarproduktbildung mit Φ_j aufgrund der Orthonormalität $\beta_j = \gamma_j = (c, \Phi_j)$. Insgesamt erhält man genau so wie in (A.23) die Lösung

$$u(t, \cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \Phi_n(\cdot) (c, \Phi_n), \tag{A.31}$$

welche aber bisher nur eine formale Lösung ist.

(d) Bemerkungen:

Da es sich hier immer nur um unendliche Summen handelt, treten Konvergenzfragen auf und Vertauschungsprozesse von Summation und Differentiation sind problematisch.

Der zugrundegelegte Funktionenraum der C^2 -Funktionen mit homogenen Randwerten bzgl. der vom Skalarprodukt (A.29) induzierten Norm

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_0^\pi |f(x)|^2 ds \right\}^{1/2} \tag{A.32}$$

ist nicht vollständig. Was bedeutet das bei Konvergenzfragen?

Wann hat man auch im PDE-Fall die Existenz einer 'Orthonormalbasis' aus Eigenvektoren eines Differentialoperators wie das obige L mit (A.26), (A.27)? Wann lassen sich die Anfangsprofile $c(x)$ wie in (A.30) darstellen? ■

A.4.3 Hyperbolic PDE Systems of First Order

We consider first the Cauchy problem

$$u_t + Au_x = 0, \quad u(0, x) = f(x), \quad (\text{A.33})$$

for $x \in \mathbb{R}^n$ and $t \geq 0$ with a smooth initial profile $f(x)$ and a constant $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ having n distinct real eigenvalues $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ with normalized right and left eigenvectors r_j and ℓ_j^T satisfying $\ell_j^* r_k = \delta_{jk}$. Let $\Lambda = \text{diag}(\lambda_j)$, $R = (r_1, \dots, r_n)$ and $L = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ be the corresponding matrices satisfying

$$AR = R\Lambda, \quad L^*A = \Lambda L^*, \quad L^*R = I. \quad (\text{A.34})$$

The change of variables

$$v = L^*u \quad \text{with inverse} \quad u = Rv \quad (\text{A.35})$$

leads to n decoupled initial value problems in

$$v_t + \Lambda v_x = 0, \quad v(0, x) = g(x) := L^*f(x). \quad (\text{A.36})$$

Its solution components are

$$v_j(t, x) = g_j(x - \lambda_j t) = \ell_j^* f(x - \lambda_j t) \quad (\text{A.37})$$

so that the u solution is

$$u(t, x) = Rv(t, x) = R \begin{pmatrix} \ell_1^* f(x - \lambda_1 t) \\ \vdots \\ \ell_n^* f(x - \lambda_n t) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.38})$$

written out as

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^n \ell_j^* f(x - \lambda_j t) r_j \quad (\text{A.39})$$

showing a decomposition of the initial profile into a sum of n waves (each one with a characteristic speed λ_j in the space $[r_j]$).

In the case of a piecewise constant initial profile

$$f(x) = u^- \quad \text{for } x < 0, \quad f(x) = u^+ \quad \text{for } x > 0 \quad (\text{A.40})$$

one speaks of **RIEMANN PROBLEM**. Let's write $u^\pm = Rv^\pm$, let's write the jump $[u^+ - u^-]$ with respect to the r_j as

$$[u^+ - u^-] = Rc \quad [\text{i.e. } L^*[u^+ - u^-] = c] \quad (\text{A.41})$$

and define the intermediates

$$\omega_k = u^- + \sum_{j=1}^k c_j r_j, \quad \omega_0 = u^-, \omega_n = u^+. \quad (\text{A.42})$$

For $x < \lambda_1 t$ one has $f(x - \lambda_j t) = u^-$ for $j \geq 1$. Hence (A.38)&(A.39) imply

$$u(t, x) = \ell_1^* u^- r_1 + \cdots + \ell_n^* u^- r_n = u^- = \omega_0 \quad (\text{A.43})$$

For $\lambda_1 t < x < \lambda_2 t$ one has $f(x - \lambda_1 t) = u^+$ and $f(x - \lambda_j t) = u^-$ for $j \geq 2$. Hence (A.38)&(A.39) imply

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \ell_1^* u^+ r_1 + \ell_2^* u^- r_2 + \cdots + \ell_n^* u^- r_n \\ &= \ell_1^* [u^+ - u^-] r_1 + \ell_1^* u^- r_1 + \ell_2^* u^- r_2 + \cdots + \ell_n^* u^- r_n \\ &= c_1 r_1 + u^- = \omega_1 . \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

And so on up to

$$u(t, x) = u^+ \quad \text{for } x > \lambda_n t . \quad (\text{A.45})$$

One thus has a piecewise constant solution with jumps $\omega_i - \omega_{i-1} = c_i r_i$ in 'eigenvector direction' (u -space!) at the discontinuity lines $x = \lambda_i t$ in 'eigenvalue direction' ((t, x) -plane!).

This topic will be continued in Appendix C.

Anhang B

PDEs erster Ordnung: Charakteristikenmethode

SET UP:

Gegeben sei im n -dimensionalen x -Raum eine skalare quasilineare PDE der Form

$$u_x(x)f_1(x, u(x)) = f_2(x, u(x)) \quad (\text{B.1})$$

mit der Nebenbedingung

$$x = x_0(\xi), u = u_0(\xi), \xi \in Q = [0, 1]^{n-1}, \quad (\text{B.2})$$

wobei hier und im folgenden *alles* so anständig/glatt wie nötig ist.

Die u -Werte sind also durch (B.2) auf einer Hyperfläche \mathcal{H} der Dimension $(n - 1)$ im \mathbb{R}^n vorgegeben. Sei $\hat{\mathcal{H}}$ die über ξ parametrisierte, durch (B.2) gegebene $(n - 1)$ -dimensionale Fläche im \mathbb{R}^{n+1} . Gleichung (B.1) lässt sich mit

$$v(z) = u(x) - y, \quad z = (x, y)^T, f = (f_1, f_2)^T \quad (\text{B.3})$$

schreiben als

$$(u_x(x), -1)f(x, u(x)) = 0 \quad (\text{B.4})$$

oder auch als

$$v_z(z)f(z) |_{v=0} = 0. \quad (\text{B.5})$$

(B.4) oder (B.5) sind aber genau die Beziehungen, die

$$\mathcal{M} = \{z : v(z) = 0\} = \{(x, y) : y = u(x)\} \quad (\text{B.6})$$

als **Integralmannigfaltigkeit** für das Vektorfeld f definieren.

★ Exkurs:

Ist der Anfangswert z_0 aus \mathcal{M} (mit $v(z_0) = 0$) und gilt längs der Lösung des AWP

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = f(z), \quad z(0) = z_0 \quad (\text{B.7})$$

die Beziehung

$$v_z(z(t))f(z(t)) = (u_x(x(t)), -1)f(x(t), y(t)) = 0, \quad (\text{B.8})$$

so gilt für $w(t) := v(z(t))$ die Beziehung

$$w(0) = 0 \ \& \ \dot{w} = v_z(z(t))\dot{z}(t) = v_z(z(t))f(z(t)) \equiv 0. \quad (\text{B.9})$$

Dh.: Die Lösung verbleibt in $\mathcal{M} = \{v(z) = 0\}$ auf ihrem Existenzintervall.

Umgekehrt gilt: Ist eine Lösung $z(t)$ aus M über ihrem maximalen Existenzintervall I_{max} (mit $y(t) = u(x(t))$), so folgen $y(0) = u(x(0))$ (dh. $z(0) \in M$) und $\dot{y}(t) = u_x(x(t))\dot{x}(t)$, ie. $f_2(x(t), y(t)) = u_x(x(t))f_1(x(t), y(t))$ (vgl. (B.8) und (B.4) bzw. (B.5)).

Zusammenfassend:

Gegeben seien eine glatte Fläche der Form $y = u(x)$ und die (B.7)–Lösungen $z(t)$ mit Komponenten $x(t)$ und $y(t)$ mit $y(0) = u(x(0))$. Dann gilt auf I_{max} :

$$y(t) = u(x(t)) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{B.8}). \quad (\text{B.10})$$

Das heisst: Die Fläche $y = u(x)$ ist genau dann invariant bzgl. (B.7), wenn das Vektorfeld f längs der (B.7)–Lösung $z(t)$ senkrecht zur Flächennormalen über $x(t)$ ist wie durch (B.8) gefordert (bzw. im Tangentialraum der Fläche über $x(t)$ liegt).

Charakteristikenmethode:

Gemäß (B.4) oder (B.5) sucht man eine invariante Fläche der Form $y = u(x)$ bzgl. des Vektorfelds f bei Berücksichtigung der Nebenbedingung (B.2). Daher assoziiert man zu (B.1) und (B.2) die ODE–Anfangswertprobleme

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = f(z), \quad z|_{t=0} = z_0(\xi) = \begin{pmatrix} x_0(\xi) \\ u_0(\xi) \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

für $\xi \in Q$ und notiert die Lösung als

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(t, \xi) \\ \phi_2(t, \xi) \end{pmatrix} = \phi(t, \xi) \quad \text{mit} \quad \phi(0, \xi) = z_0(\xi). \quad (\text{B.12})$$

Diese Lösungen von (B.11) generieren eine invariante Fläche, welche die Anfangsbedingung erfüllt, aber über Variable t, ξ (an Stelle der gewünschten Variablen x) parametrisiert ist. Ist nun die Abbildung ϕ_1 nahe $0 \times Q$ glatt invertierbar – was der Fall ist unter (B.14) –, so betrachte dort die Funktionen

$$u(x) := \phi_2(\phi_1^{-1}(x)) \quad \text{und} \quad v(z) = u(x) - y. \quad (\text{B.13})$$

Für sie gelten die PDE (B.1) und die Nebenbedingung (B.2) bzw. (B.5) wegen

$$\begin{aligned} u_x(x)f_1(x, u(x)) &= (D_t\phi_2, D_\xi\phi_2)|_{\phi_1^{-1}(x)} (D_t\phi_1, D_\xi\phi_1)^{-1}|_{\phi_1^{-1}(x)} f_1(x, u(x)) = \\ &= (f_2(\phi(t, \xi)), (D_\xi\phi_2)|_{\phi_1^{-1}(x)} (f_1(\phi(t, \xi)), (D_\xi\phi_2)|_{\phi_1^{-1}(x)})^{-1} f_1(\phi(t, \xi)) = \\ &= f_2(\phi(t, \xi)) = f_2(x, u(x)). \end{aligned}$$

- Beim Aufsuchen invarianter Kurven $y = u(x)$ bzgl. (B.7) bei skalaren x und y entspricht dies dem Übergang zu

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)},$$

wenn man die Lösung dieser Gleichung mit $y = u(x)$ bezeichnet ($f_1 \neq 0$).

Die angestrebte Invertierbarkeit ist nahe der Nebenbedingung (B.2) sicher gegeben, falls das Vektorfeld f_1 auf (B.2) transversal zu dem $(n - 1)$ -dimensionalen Tangentialraum an \mathcal{H} aus (B.2) ist, also falls

$$f_1(z_0(\xi)) \notin T\mathcal{H}|_{x_0(\xi)} \quad \text{dh.} \quad \det(f_1(z_0(\xi)), \frac{\partial z_0}{\partial \xi}(\xi)) \neq 0 \quad (\text{B.14})$$

gilt. Am Rande: Es folgt dann automatisch, dass f am Punkt $z_0(\xi)$ nicht im dortigen Tangentialraum von $\hat{\mathcal{H}}$ – aufgespannt von den Spalten von $\frac{\partial z_0}{\partial \xi}(\xi)$ – liegt.

Der Begriff **Charakteristik** wird in der Literatur nicht einheitlich benutzt. Oft werden die (B.7)–Lösungen $z = \phi(t, \xi)$ als Charakteristiken und die $x = \phi_1(t, \xi)$ als deren Projektionen bezeichnet. Die z -Kurven können sich nicht schneiden (bei glatten Ausgangsdaten), die Projektionen schon. Liest man also von sich schneidenden Charakteristiken, so sind wohl die x -Kurven als *Charakteristiken* definiert worden.

SPEZIALFALL:

$$u_\theta + b(\theta, s, u)u_s = c(\theta, s, u) \quad \text{mit} \quad \theta = 0, s = \xi, u = u_0(\xi) \quad (\text{B.15})$$

für $(\theta, s, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ und $\xi \in [0, 1]^{n-1}$. Setze $x = (\theta, s)$, $f = (1, b, c)$, so dass sich als assoziierte ODE

$$\begin{aligned} \theta_t &= 1, & \theta|_{t=0} &= 0, \\ s_t &= b(\theta, s, y), & s|_{t=0} &= \xi, \\ y_t &= c(\theta, s, y), & y|_{t=0} &= u_0(\xi) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

ergibt mit $\theta \equiv t$ und dem nichtautonomen System $s_t = b(t, s, y)$, $y_t = c(t, s, y)$. ■

ZUSATZ:

Die Integralmannigfaltigkeit \mathcal{M} kann auch implizit durch eine Beziehung $V(x, y) = 0$ gegeben sein, wenn diese Gleichung nur eindeutig und glatt in der Form $y = u(x)$ auflösbar ist. Gelten z.B.

$$V_z f(z)|_{V=0} = 0, \quad V_y|_{V=0} \neq 0 \quad \text{und} \quad V(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = u(x), \quad (\text{B.17})$$

so folgen

$$(V_x, V_y) \begin{pmatrix} I \\ u_x \end{pmatrix} = V_x + V_y u_x \equiv 0 \quad \text{auf} \quad V = 0, \quad f(z)|_{V=0} \in \text{Bild} \begin{pmatrix} I \\ u_x \end{pmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

Letzteres ist nun äquivalent zu (B.1), ie. $(u_x(x), -1)f(x, u(x)) = 0$ (Fredholm!). ■

VERALLGEMEINERUNG:

All dies lässt sich verallgemeinern auf skalare partielle Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} F(x, u, u_x) &= 0 \text{ bzw.} \\ F(x, u, q) &= 0 \ \& \ q = u_x \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

mit der Nebenbedingung (B.2), dh. bei $' = \frac{\partial}{\partial \xi}$ mit

$$F(x_0(\xi), u_0(\xi), q_0(\xi)) = 0 \ \& \ u'_0(\xi) = q_0(\xi)x'_0(\xi). \quad (\text{B.20})$$

Hat man ein Vektorfeld $(A, B, C)^T$, so dass $F = 0$ eine Integralmannigfaltigkeit für

$$\begin{aligned} z_t \equiv \begin{pmatrix} x_t \\ u_t \\ q_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} (x, u, q) \equiv f(z), \\ u_t &= u_x \dot{x} = q^T x_t \quad (B = q^T A) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingung liefert, so gelten

$$F(z(t, \xi)) = F(x(t, \xi), u(t, \xi), q(t, \xi)) \equiv 0, \quad u_t(t, \xi) \equiv q^T(t, \xi)x_t(t, \xi). \quad (\text{B.22})$$

Eine Differentiation bzgl. t liefert

$$0 = F_x x_t + F_u u_t + F_q q_t = (F_x, F_u, F_q) \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \ \& \ u_t = q^T x_t \quad (\text{B.23})$$

und mit $B = q^T A$

$$[F_x + F_u q^T]A + F_q C = 0. \quad (\text{B.24})$$

Mit der Wahl $A = F_q^T$ gelangt man zu $C^T = -[F_x + F_u q^T]$ als Lösung (modulo $\text{Kern} F_q$). Betrachte daher als assoziiertes ODE–Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x_t &= F_q^T, & x|_{t=0} &= x_0(\xi), \\ u_t &= F_q q, & u|_{t=0} &= u_0(\xi), \\ q_t &= -F_x^T - F_u q, & q|_{t=0} &= q_0(\xi). \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Beachte, dass $D_x F(x, u, u_x) \equiv 0$ zu $F_x + F_u u_x + F_q u_{xx} = F_x + F_u q + q_t \equiv 0$ führt. Aus der Invertierung der Komponente $x = \phi_1(t, \xi)$ der Lösung $\phi(t, \xi) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T(t, \xi)$ erhält man wie oben eine Funktion $u = \phi_2(\phi_1^{-1}(x))$, welche – in der Tat und automatisch – die Gleichung $u_x(x) = \phi_3(\phi_1^{-1}(x))$ erfüllt. ■

Anhang C

Weak Solutions and Shocks

This appendix applies – of course – also to one-dimensional equations for scalar-valued function $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^1$ where it simplifies a lot.

C.1 Weak Solutions – Rankine-Hugoniot Conditions

(I) A measurable function u is a *distributional solution* of

$$u_t + (f(u))_x = 0 \tag{C.1}$$

with C^1 -function f if for every C^1 ϕ with compact support one has

$$\int \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^2} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt = 0 . \tag{C.2}$$

Given an initial $\bar{u}(x)$ in L^1_{loc} the function $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a distributional solution of the Cauchy-problem if

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \bar{u}(x)\phi(0, x) dx = 0 \tag{C.3}$$

for every C^1 ϕ with compact support in $(-\infty, T] \times \mathbb{R}$. Such a function is a *weak solution* if it is continuous in t from $[0, T]$ to L^1_{loc} with $u(0, x) = \bar{u}(x)$ and if its restriction to $(0, T] \times \mathbb{R}$ is a distributional solution of the Cauchy-problem.

Consider a piecewise Lipschitz-function u with a finite number of *jump or shock curves* in the (t, x) -plane. Let's start with

$$U(t, x) = u^+, \quad x > \lambda t, \quad U(t, x) = u^-, \quad x < \lambda t . \tag{C.4}$$

It is a distributional solution of (C.1) iff the **RANKINE-HUGONIOT CONDITION** cf. (II) –

$$\lambda [u^+ - u^-] = f(u^+) - f(u^-) = A(u^+, u^-) [u^+ - u^-] \tag{C.5}$$

holds with

$$A(u, v) = \int_0^1 A(su + (1-s)v) ds . \quad (\text{C.6})$$

This follows from the divergence theorem on $\{x < \lambda t\}$ and $\{x > \lambda t\}$ with normal vector $\nu^T = (\lambda, -1)$ to the separating straight line. We rewrite (C.5) as

$$\nu^T [F(u^+) - F(u^-)] = 0 = (\lambda, -1) \begin{pmatrix} u^+ - u^- \\ f(u^+) - f(u^-) \end{pmatrix} . \quad (\text{C.7})$$

The Rankine-Hugoniot conditions are satisfied more generally at every (τ, ξ) where a solution has an *approximate jump discontinuity*.

- Note from (C.5) that in the scalar case the mean value theorem implies

$$\lambda = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} = f'(u^*) \quad (\text{C.8})$$

with an intermediate u^* out of the interval bounden by u^\pm . In case f' is monotone λ can be related to $f'(u^\pm)$. [When $f'' > 0$ one necessarily has $u^- > u^+$ and hence $f'(u^-) > \lambda > f'(u^+)$.]

A necessary and sufficient condition for a piecewise Lipschitz-function to be a distributional solution of (C.1) can be stated for PL-systems (piecewise Lipschitz-regularity with finitely many exceptional Lipschitz-curves $\gamma_j(t)$).

- **Bressan's Theorem 4.2 in [14]**

For a PL-system u is a distributional solution if and only if the quasilinear equation $u_t + A(u)u_x = 0$ holds almost everywhere and, moreover for each j , one has almost everywhere in (a_j, b_j)

$$\dot{\gamma}_j(t)[u_j^+(t) - u_j^-(t)] = f(u_j^+(t)) - f(u_j^-(t)).$$

- The notion of weak solution is **not** invariant under coordinate transformations of the dependent u -variable. The notion of weak solution is **not** stringent enough to single out unique solutions.

(II) Derivation of the **RANKINE-HUGONIOT-CONDITION** for weak solutions:

We write $u_t + (F(u))_\xi = 0$ as $\text{div}(\mathcal{A}(x, u)) = 0$ with scalar u and $(t, \xi) = x \in Q = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$, consider $\int_Q \text{div}(\mathcal{A}(x, u))\phi(x)dx = 0$ and integrate by parts

$$\int_Q \text{grad}\phi(x)\mathcal{A}(x, u)dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(Q). \quad (\text{C.9})$$

Classical solutions are weak solutions, weak solutions with $\mathcal{A}(x, u) \in C^1$ are classical solutions. Let now Q be divided by the straight line $\Gamma = \{\xi = \sigma t\}$ with unit normal

$$\nu = (-\sigma, 1)/\sqrt{1 + \sigma^2} \quad (\text{C.10})$$

pointing into Ω_+ where $\Omega_{\pm} = \{\pm\xi > \sigma t\}$. Let $u \in C^1(\Omega_{\pm})$ be a weak solutions with $\mathcal{A}(x, u) \in C^1(\Omega_{\pm})$. Rewriting (C.9) we have

$$\int_{\Omega_-} \operatorname{div}(\mathcal{A}(x, u))\phi(x)dx + \int_{\Omega_+} \operatorname{div}(\mathcal{A}(x, u))\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(Q). \quad (\text{C.11})$$

Via integration by parts we obtain with the jump

$$[[\mathcal{A}(x, u)]] := \lim_{\Omega_- \ni x \rightarrow \Gamma} \mathcal{A}(x, u(x)) - \lim_{\Omega_+ \ni x \rightarrow \Gamma} \mathcal{A}(x, u(x)) \quad (\text{C.12})$$

the relation

$$\int_{\Gamma} \phi(x)\nu[[\mathcal{A}(x, u)]]do = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(Q) \quad (\text{C.13})$$

and thus $\nu[[\mathcal{A}(x, u)]] = 0$, i.e. the

$$\text{Rankine-Hugoniot Jump Condition} \quad \sigma(\omega_+ - \omega_-) \stackrel{!}{=} F(\omega_+) - F(\omega_-) \quad (\text{C.14})$$

for ω_{\pm} denoting the respective u -limits as $\Omega_{\pm} \ni x \rightarrow \Gamma$. ■

(III) Exercise:

Consider first the n -dimensional Cauchy problem

$$u_t + Au_x = 0, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 3/2 & 3 \end{pmatrix}, \quad u(0, x) = f(x), \quad (\text{C.15})$$

for $x \in \mathbb{R}$ and $t \geq 0$ with a piecewise constant initial profile

$$f(x) = u^- = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{for } x < 0, \quad f(x) = u^+ = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{for } x > 0. \quad (\text{C.16})$$

One has

$$AR = R\Lambda \quad \text{with} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 7/2 \end{pmatrix}, \quad R = (r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.17})$$

With

$$\begin{aligned} \omega_0 &= u^- = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \omega_1 &= \omega_0 + r_1 r_1^* \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.3 \end{pmatrix} \\ \omega_2 &= \omega_1 + r_2 r_2^* \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{9}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = u^+ \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

we arrive at

$$u(t, x) = \begin{cases} \omega_0 = u^- & \text{for (S1): } x < -\frac{3}{2}t, \\ \omega_1 & \text{for (S2): } -\frac{3}{2}t < x < \frac{7}{2}t, \\ \omega_2 = u^+ & \text{for (S3): } x > \frac{7}{2}t. \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

What's the special property of (C.19)? The Rankine-Hugoniot-Condition for *weak solutions*:

Look at

$$\sigma [\omega_{j+1} - \omega_j] = A[\omega_{j+1} - \omega_j] \quad (\text{C.20})$$

along a jump line $x = \sigma t$. It enforces

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda_1, & \omega_1 &= \omega_0 + \mu_1 r_1, \\ \sigma &= \lambda_2, & \omega_2 &= \omega_1 + \mu_2 r_2 \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

for suitable μ_j with $\omega_0 + \mu_1 r_1 = \omega_2 - \mu_2 r_2$, i.e.

$$u^+ - u^- = \omega_2 - \omega_0 = R\mu, \quad \mu = R^*[u^+ - u^-] = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{10} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.9 \end{pmatrix} \quad (\text{C.22})$$

leading to (C.18). ■

C.2 Riemann-Problems for Quasilinear Systems

Taken from [14]: Given

$$u_t + (a(u))_x = u_t + A(u)u_x = 0 \quad (\text{C.23})$$

with initial profile $u(0, x) = f(x)$. In the case of a piecewise constant initial profile

$$f(x) = u^- \text{ for } x < 0, \quad f(x) = u^+ \text{ for } x > 0 \quad (\text{C.24})$$

one speaks of the **RIEMANN PROBLEM**. Let $A(u) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ have n distinct real eigenvalues $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)$ – **STRICTLY HYPERBOLIC CASE** – with normalized right and left eigenvectors $r_j(u)$ and $\ell_j^T(u)$ satisfying $\ell_j^T(u) r_k(u) = \delta_{jk}$. (i)

Consider the **i -th characteristic (vector) field $r_i(u)$** together with the autonomous IVP

$$\frac{dU}{d\sigma} = r_i(U), \quad U(0) = u^- \quad (\text{C.25})$$

and denote its solution by $U(\sigma)$. Let's assume

$$u^+ = U(\sigma^+), \quad \sigma^+ \geq 0, \quad (\text{C.26})$$

and

$$\frac{d}{d\sigma} \lambda_i(U(\sigma)) = \text{grad} \lambda_i(U(\sigma)) r_i(U(\sigma)) > 0 \quad (\text{C.27})$$

on $[0, \sigma^+]$ – **genuine nonlinearity**. Then the map

$$\sigma : [0, \sigma^+] \ni \sigma \mapsto \Lambda_i(\sigma) := \lambda_i(U(\sigma)) \in [\Lambda_i(0), \Lambda_i(\sigma^+)] \quad (\text{C.28})$$

is a strictly increasing bijection. We define the ***i*-th (centered) rarefaction wave**

$$u(t, x) = \begin{cases} U(0) = u^- , & x \leq \Lambda_i(0)t \\ U(\sigma) , & x = \Lambda_i(\sigma)t = \lambda_i(U(\sigma)) \in [\Lambda_i(0)t, \Lambda_i(\sigma^+)t] \\ U(\sigma^+) = u^+ , & x \geq \Lambda_i(\sigma^+)t \end{cases} \quad (\text{C.29})$$

This u is clearly a solution for $x < \Lambda_i(0)t$ and for $x > \Lambda_i(\sigma^+)t$. For the region

$$\Lambda_i(0)t < x = \Lambda_i(\sigma)t < \Lambda_i(\sigma^+)t$$

in between one has

$$u(t, \Lambda_i(\sigma)t) \equiv U(\sigma) \quad (\text{C.30})$$

and hence for the derivatives wrt t and σ :

$$\begin{aligned} u_t(t, \Lambda_i(\sigma)t) + u_x(t, \Lambda_i(\sigma)t) \Lambda_i(\sigma) &= u_t + u_x \frac{x}{t} = 0, \\ u_x(t, \Lambda_i(\sigma)t) \text{grad}(\lambda_i(U(\sigma))) U_\sigma(\sigma) t &= U_\sigma(\sigma) = r_i(U(\sigma)). \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

This shows – by (C.27) – that $u_x(t, \Lambda_i(\sigma)t)$ is a nontrivial element of the eigenspace $[r_i(U(\sigma))]$ so that one has

$$\Lambda_i(\sigma) u_x(t, \Lambda_i(\sigma)t) = A(U(\sigma)) u_x(t, \Lambda_i(\sigma)t) = A(u(t, x)) u_x(t, \Lambda_i(\sigma)t) . \quad (\text{C.32})$$

From (C.30) and (C.32) we thus obtain the solution property of (C.29):

$$0 = u_t(t, \Lambda_i(\sigma)t) + u_x(t, \Lambda_i(\sigma)t) \Lambda_i(\sigma) = u_t(t, x) + A(u(t, x)) u_x(t, x) . \quad (\text{C.33})$$

(ii)

Let's look for **shock waves** of the form

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- & \text{for } x < \lambda t \\ u^+ & \text{for } x > \lambda t \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

for some λ satisfying the Rankine-Hugoniot condition

$$a(u^+) - a(u^-) = \lambda[u^+ - u^-] \quad (\text{C.35})$$

which can be written by the mean-value theorem as

$$\begin{aligned} a(u) - a(u^-) &= \tilde{A}(u, u^-)[u - u^-] = \lambda[u - u^-] \\ \text{with } \tilde{A}(u, u^-) &= \int_0^1 A(\theta u + (1 - \theta)u^-) d\theta \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

offering λ as eigenvalue with eigenvector $u - u^-$. For fixed u^- one has n equations for the $(n + 1)$ unknowns λ and u_1^+, \dots, u_n^+ .

- THEOREM ([14] 5.1, P.93)

For u^+ close to u^- there exist locally n smooth curves $u^+ = S_i(\sigma)$ together with scalar functions $\lambda_i = \lambda_i(\sigma)$ with

$$a(S_i(\sigma)) - a(u^-) = \lambda_i(\sigma)[S_i(\sigma) - u^-], \quad -\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_0. \quad (\text{C.37})$$

The parametrization can be chosen such that one has $|dS_i/d\sigma| = 1$ and

$$\begin{aligned} S_i(0) &= u^-, \quad \lambda_i(0) = \lambda_i(u^-), \\ \frac{dS_i}{d\sigma}(0) &= r_i(u^-), \quad \frac{d\lambda_i}{d\sigma}(0) = \frac{1}{2} [\text{grad}(\lambda_i)r_i] |_{u^-}, \quad \frac{d^2S_i}{d\sigma^2}(0) = [Dr_i r_i] |_{u^-} . \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

- In the case of genuine nonlinearity

$$\frac{d}{d\sigma} \lambda_i(U(\sigma)) = \text{grad} \lambda_i(U(\sigma)) r_i(U(\sigma)) > 0 \quad (\text{C.39})$$

the orientation of the eigenvector r_i and the parametrization of S_i are uniquely determined. In case of **linear degeneracy**

$$\frac{d}{d\sigma} \lambda_i(U(\sigma)) = \text{grad} \lambda_i(U(\sigma)) r_i(U(\sigma)) \equiv 0 \quad (\text{C.40})$$

the i -th shock curve $S_i(\sigma)$ coincides with the i th rarefaction curve $U_i(\sigma)$ of (C.25).

The function

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- & \text{for } x < \lambda_i(\sigma)t \\ S_i(\sigma) & \text{for } x > \lambda_i(\sigma)t \end{cases} \quad (\text{C.41})$$

is a WEAK SOLUTION of (C.23). In case of genuine nonlinearity it is called a **compressive shock** for $\sigma < 0$ and a **rarefaction shock** for $\sigma > 0$. In case of linear degeneracy it is called a **contact discontinuity**.