

Direkte Lösungsverfahren für die algebraische Riccatigleichung

Matthias Voigt

4. Januar 2010

1 Wiederholung

Gegeben sei die zeitkontinuierliche algebraische Riccatigleichung

$$Q + A^T X + X A - X G X = 0, \quad (1)$$

die im Folgenden als CARE bezeichnet wird. Wir betrachten nun die Hamiltonische Matrix

$$H := \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

und ihr Spektrum

$$\Lambda(H) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cup \{-\lambda_1, \dots, -\lambda_n\}, \quad \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Satz 1. Sei die CARE (1) mit symmetrisch positiv definiten G und Q gegeben, sowie (A, G) stabilisierbar und (A, Q) beobachtbar. Sei desweiteren

$$\operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \right\} \quad \text{mit } U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

H -invarianter Unterraum zu $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}^-$. Dann ist

$$X_* = X_*^T = V U^{-1} \quad (2)$$

eindeutige stabilisierende Lösung der CARE (1).

Frage: Wie berechnen wir U und V ?

2 Schurvektormethode

Die folgende Kapitel beruhen im Wesentlichen auf [3]. Erste Idee könnte sein, den QR-Algorithmus auf die Matrix H anzuwenden, d.h. man bestimme eine orthogonale Transformationsmatrix Q , sodaß

$$Q^T H Q = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

wobei T_{11} und T_{22} quasi-obere Dreiecksmatrizen sind und $\Lambda(T_{11}) \subset \mathbb{C}^-$. Sei Q wie in (3) partitioniert, d.h.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix} \right\}$ der gesuchte invariante Unterraum. Die Berechnung von der Lösung X_* von (1) erfolgt in drei Schritten:

1. Anwendung der Standard-QR-Iteration auf H ,
2. Sortierung der Eigenwerte mittels orthogonaler Ähnlichkeitstransformationen,
3. Lösung von n Gleichungssystemen $XQ_{11} = Q_{21}$.

Definition 1 (Starke Stabilität). *Ein Algorithmus heißt stark stabil, wenn er sowohl numerisch rückwärts stabil, als auch strukturerhaltend ist.*

Vorteil: Der Algorithmus ist numerisch rückwärts stabil.

Nachteil: Die Matrix H wird wie eine allgemeine Matrix behandelt, d.h. die Hamiltonische Struktur wird nicht beachtet. Durch numerische Fehler geht desweiteren die Hamiltonische Spektralsymmetrie verloren. Insbesondere können durch die Berechnung (exakte) Eigenwerte, die sehr nahe an der imaginären Achse liegen, von der linken Halbebene in die rechte (und umgekehrt) gelangen, wodurch keine Berechnung einer stabilisierenden Lösung von (1) mehr möglich ist. D.h. der Algorithmus ist nicht stark stabil.

Beispiel 1. *Ein Beispiel, bei dem sich der Verlust der Spektralsymmetrie besonders negativ auswirkt, ist Beispiel 20 in [2]. Hierbei liegen einige der berechneten Eigenwerte in der falschen Halbebene, wie man leicht erkennen kann (siehe Abb. 1). Zur besseren Veranschaulichung wurden die Ergebnisse in Single-Precision-Arithmetik berechnet.*

3 Hamiltonische Schurmethode

Als eine bessere Idee zur Berechnung der stabilisierenden Lösung einer CARE bieten sich strukturerhaltende Methoden für Hamiltonische Eigenwertprobleme an. Im Folgenden veranschaulichen wir ein Verfahren für den komplexen Fall, da der reelle Fall aufwendigere Notationen erfordert, aber wenig neue Erkenntnisse bringt. Zuerst benötigen wir noch einige grundlegende Definitionen und Lemmata.

Definition 2 (Symplektische Matrix). *Eine Matrix $S \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ heißt symplektisch, wenn $S\mathcal{J}S^H = \mathcal{J}$, wobei $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ ist.*

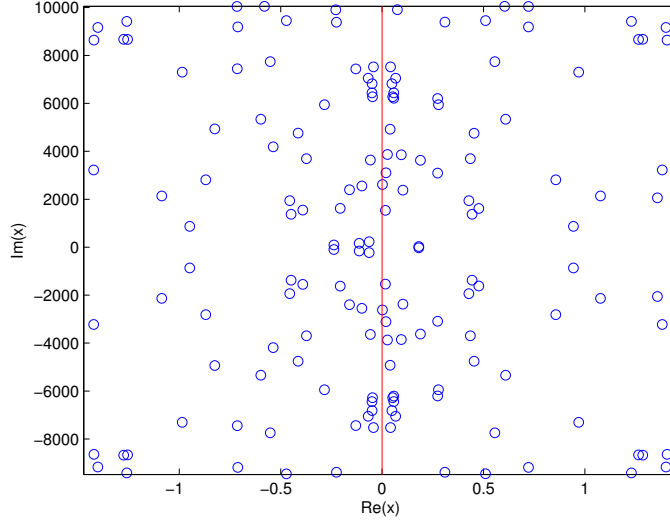


Abbildung 1: Einige berechnete Eigenwerte von CAREX(20)

Das Folgende wurde im Wesentlichen aus [1] entnommen.

Lemma 1. *Sei $H \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ Hamiltonisch und sei $S \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ symplektisch. Dann ist $S^{-1}HS$ wieder Hamiltonisch.*

Jede unitäre symplektische Matrix $U \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ hat folgende Struktur:

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ -U_{12} & U_{11} \end{bmatrix}.$$

Satz 2 (Hamiltonische Schurzerlegung). *Sei $H \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ Hamiltonische Matrix, die nur Eigenwerte mit von Null verschiedenem Realteil hat. Dann existieren eine unitäre symplektische Matrix $U \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ und eine Hamiltonische Matrix $T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, sodaß*

$$U^H H U = T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & -T_1^H \end{bmatrix},$$

wobei T_1 obere Dreiecksmatrix und T_2 hermitisch ist.

Wir versuchen jetzt also einen QR-artigen Algorithmus herzuleiten, bei dem alle Ähnlichkeitstransformationen unitär symplektisch sind. Leider existiert eine symplektische QR-Zerlegung nicht immer, jedoch gilt folgendes.

Satz 3. *Sei $M \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ symplektisch. Dann existiert eine unitäre symplektische Matrix $S \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, sodaß*

$$M = SR = S \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{11}^{-H} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}.$$

Algorithm 1 Einfacher symplektischer QR-Algorithmus

- 1: **for** $j = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: Berechne symplektische QR-Zerlegung $H_j = S_{j+1}R_{j+1}$,
 - 3: Berechne $H_{j+1} = R_{j+1}S_{j+1}$. $\{H_{j+1} = S_{j+1}^H H_j S_{j+1}$ ist also wieder Hamiltonisch. $\}$
 - 4: **end for**
-

Falls wir den Cayley-Shift $q(H) = (H + \bar{\mu}I_{2n})(H - \mu I_{2n})^{-1}$ für Eigenwertapproximationen μ verwenden, so ist $q(H)$ symplektisch, also existiert eine symplektische QR-Zerlegung (verwende $q(H) = (H + \mu I_{2n})(H - \mu I_{2n})^{-1}$ für approximierete reelle Eigenwerte bzw. $q(H) = (H + \mu I_{2n})(H + \bar{\mu}I_{2n})[(H - \mu I_{2n})(H - \bar{\mu}I_{2n})]^{-1}$ für approximierete komplexe Eigenwerte im reellen Fall). Leider hat der so entwickelte Algorithmus eine Komplexität von $\mathcal{O}(n^4)$, da jede symplektische QR-Zerlegung $\mathcal{O}(n^3)$ Flops benötigt und in der Regel $\mathcal{O}(n)$ Iterationen erforderlich sind. Der fehlende Zwischenschritt ist eine Reduktion von H auf eine Hessenberg-artige Gestalt, welche:

- invariant unter Ähnlichkeitstransformationen in jedem Schritt des Hamiltonischen QR-Algorithmus ist,
- eine Implementation des Hamiltonischen QR-Schrittes in $\mathcal{O}(n^2)$ erlaubt.

Definition 3 (Hamiltonische Hessenbergform). *Eine Hamiltonische Matrix $H \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ ist in Hamiltonischer Hessenbergform, wenn*

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & -H_{11}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ * & \square \end{bmatrix},$$

wobei $H_{i,j} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $i, j = 1, 2$, H_{11} ist obere Hessenbergmatrix und $H_{12} = \phi e_n e_n^H$ mit $\phi \in \mathbb{C}$ und e_n als n -tem Einheitsvektor. Die Hamiltonische Hessenbergmatrix H ist unreduziert, wenn $h_{i+1,i} \neq 0$, $i = 1, \dots, n-1$ und $\phi \neq 0$.

Ein Problem liegt jedoch darin, daß nicht jede Hamiltonische Matrix auf Hamiltonische Hessenbergform transformiert werden kann. Dies geht jedoch z.B. immer für Hamiltonische Matrizen, bei denen $\text{rank}(G) = 1$ oder $\text{rank}(Q) = 1$ und ist im Falle von Single-Input- oder Single-Output-Systemen immer erfüllt.

Es kann gezeigt werden, daß wenn H_j in Hamiltonischer Hessenbergform ist und der Cayley-Shift als Shiftfunktion gewählt wird, auch die Matrix $H_{j+1} = S_{j+1}^H H_j S_{j+1}$ wieder in Hamiltonischer Hessenbergform ist und der Hamiltonische QR-Schritt in $\mathcal{O}(n^2)$ implementiert werden kann. Wir wollen den ersten Teil der Aussage beweisen.

Beweis. Der Beweis folgt der Argumentation von [4]. Sei dazu

$$\mathcal{P}_0 = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \text{und} \quad \mathcal{P} = \begin{bmatrix} I_n & \\ & \mathcal{P}_0 \end{bmatrix}.$$

Desweiteren sei

$$\begin{aligned} M_j &:= (H_j + \bar{\mu}I_{2n})(H_j - \mu I_{2n})^{-1} \\ &= S_{j+1}R_{j+1} \quad (\text{symplektische QR-Zerlegung}). \end{aligned}$$

Wir definieren nun noch $\tilde{H}_j := \mathcal{P}H_j\mathcal{P}$, $\tilde{H}_{j+1} := \mathcal{P}H_{j+1}\mathcal{P}$, $\tilde{S}_{j+1} := \mathcal{P}S_{j+1}\mathcal{P}$ und $\tilde{R}_{j+1} := \mathcal{P}R_{j+1}\mathcal{P}$, wobei \tilde{R}_{j+1} obere Dreiecksmatrix ist. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{j+1}\tilde{R}_{j+1} &= \mathcal{P}S_{j+1}\mathcal{P}\mathcal{P}R_{j+1}\mathcal{P} \\ &= \mathcal{P}S_{j+1}R_{j+1}\mathcal{P} \\ &= \mathcal{P}M_j\mathcal{P} \\ &= \mathcal{P}(H_j + \bar{\mu}I_{2n})\mathcal{P}\mathcal{P}(H_j - \mu I_{2n})^{-1}\mathcal{P} \\ &= (\tilde{H}_j + \bar{\mu}I_{2n})(\tilde{H}_j - \mu I_{2n})^{-1}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die aufeinanderfolgenden QR- bzw. RQ-Schritte

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j + \bar{\mu}I_{2n} &= \hat{Q}_1\hat{R}_1 \\ \hat{H}_1 &:= \hat{R}_1\hat{Q}_1 - \bar{\mu}I_{2n} \\ \hat{H}_1 - \mu I_{2n} &= \hat{R}_2\hat{Q}_2 \\ \hat{H}_2 &:= \hat{Q}_2\hat{R}_2 + \mu I_{2n} \end{aligned} \tag{4}$$

Es kann nun leicht durch Umformen der Ausdrücke in (4) gezeigt werden, daß

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \hat{Q}_1^H \tilde{H}_j \hat{Q}_1, \\ \hat{H}_2 &= \hat{Q}_2 \hat{H}_1 \hat{Q}_2^H. \end{aligned}$$

Schritt für Schritt kann man nun zeigen, daß \hat{H}_2 obere Hessenbergmatrix ist. Insbesondere ist \hat{H}_2 genau dann unreduziert, falls \tilde{H}_j unreduziert ist. Zudem gilt

$$(\hat{Q}_1\hat{Q}_2^H)(\hat{R}_2^{-1}\hat{R}_1) = (\tilde{H}_j + \bar{\mu}I_{2n})(\tilde{H}_j - \mu I_{2n})^{-1},$$

wodurch nun eine unitäre Phasenmatrix $\Phi = \text{diag}(e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_{2n}})$ existiert, sodaß $\tilde{S}_{j+1} = \hat{Q}_1\hat{Q}_2^H\Phi$. Damit gilt nun, daß

$$\tilde{S}_{j+1}^H \tilde{H}_j \tilde{S}_{j+1} = \Phi^H \hat{Q}_2 \hat{Q}_1^H \tilde{H}_j \hat{Q}_1 \hat{Q}_2^H \Phi = \Phi^H \hat{H}_2 \Phi$$

obere Hessenbergmatrix ist und folglich ist

$$\begin{aligned}
 H_{j+1} &= S_{j+1}^H H_j S_{j+1} \\
 &= \mathcal{P} \tilde{S}_{j+1}^H \mathcal{P} \mathcal{P} \tilde{H}_j \mathcal{P} \mathcal{P} \tilde{S}_{j+1} \mathcal{P} \\
 &= \mathcal{P} \tilde{S}_{j+1}^H \tilde{H}_j \tilde{S}_{j+1} \mathcal{P} \\
 &= \mathcal{P} \hat{H}_2 \mathcal{P}
 \end{aligned}$$

in Hamiltonischer Hessenbergform. \square

Durch obige Betrachtungen wird auch klar, daß man nie dazu gezwungen ist, die Cayley-Shifts (also auch die Inversen) explizit zu berechnen. Dies kann analog zum gewöhnlichen QR-Algorithmus über implizites Shiften geschehen.

Der Hamiltonische QR-Algorithmus beinhaltet dann im Wesentlichen drei Schritte:

- Transformation auf Hamiltonsche Hessenbergform, d.h. finde eine unitäre

symplektische Matrix Q , sodaß $H := Q^H H Q = \begin{bmatrix} \diagdown & \square \\ * & \diagdown \end{bmatrix}$,

- Hamiltonische QR-Iteration, d.h. finde eine unitäre symplektische Ma-

trix Q_1 mit $H := Q_1^H H Q_1 = \begin{bmatrix} \diagdown & \square \\ & \diagdown \end{bmatrix}$, Update $Q := Q Q_1$,

- Eigenwertumordnung zur Berechnung des stabilen invarianten Unter-

raumes, d.h. finde eine unitäre symplektische Matrix Q_2 , sodaß $H := Q_2^H H Q_2 = \begin{bmatrix} \diagdown & \square \\ & \diagdown \end{bmatrix}$ und alle Eigenwerte mit negativem Realteil

befinden sich im linken oberen Block von H , Update $Q := Q Q_2$.

Vorteile: Das Verfahren ist stark stabil. Zudem ist es durch die Ausnutzung der Struktur schneller als der Standard-QR-Algorithmus.

Nachteile: Das Verfahren funktioniert nur für spezielle Hamiltonische Matrizen.

Die Nachteile des Hamiltonischen QR-Algorithmus können mittels eines Einbettungsverfahrens ausgeglichen werden, bei dem das Eigenwertproblem für

die eingebettete Matrix $\begin{bmatrix} & H \\ H & \end{bmatrix}$ betrachtet wird. Außerdem existieren direkte Verfahren, bei denen die Transformationsmatrizen nicht mehr unitär

(orthogonal) sein müssen (z.B. SR-Algorithmus). Diese Verfahren sind jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit und daher wird auf weiterführende Literatur verwiesen.

Literatur

- [1] BENNER, P.: Computational Methods for Linear-Quadratic Optimization / Universität Bremen - Zentrum für Technomathematik. 1998. – Forschungsbericht
- [2] BENNER, P. ; LAUB, A. J. ; MEHRMANN, V.: A Collection of Benchmark Examples for the Numerical Solution of Algebraic Riccati Equations I: Continuous-Time Case / Technische Universität Chemnitz-Zwickau. 1995. – Forschungsbericht
- [3] DATTA, B. N.: *Numerical Methods for Linear Control Systems*. Elsevier Academic Press, 2004
- [4] DÜCK, M.: *Verfahren zur Lösung algebraischer Matrix-Riccati-Gleichungen*, Universität Bayreuth, Fakultät für Mathematik und Physik, Diplomarbeit, Oktober 1994