

# Iterative Löser für die algebraische Riccatigleichung

Martin Köhler

11. Januar 2010

## 1 Wiederholung

Gegeben sei die algebraische Riccatigleichung (ARE)

$$\mathcal{R}(X) := Q + A^T X + X A - X G X = 0. \quad (1)$$

Die zur algebraischen Riccatigleichung gehörende Hamiltonische Matrix sei durch

$$H := \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (2)$$

gegeben. Das Spektrum von  $H$  hat die Gestalt

$$\Lambda(H) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cup \{-\lambda_1, \dots, -\lambda_n\}, \quad \Re(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Eine Aussage zur Lösung der ARE (1) liefert der folgende Satz.

**Satz 1.** Sei die ARE (1) mit symmetrisch positiv semidefiniten  $Q$  und  $G$  gegeben und das Paar  $(A, G)$  stabilisierbar, sowie das Paar  $(A, Q)$  beobachtbar. Sei weiterhin

$$\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \right\} \text{ mit } U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ein  $H$ -invarianter Unterraum zu  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}^-$ . Dann ist

$$X_* = X_*^T = -V U^{-1} \quad (3)$$

die eindeutige stabilisierende Lösung der ARE (1).

Eine iterative Möglichkeit zur Bestimmung des  $H$ -invarianten Unterraums stellt die *Signumfunktionsmethode* dar, welche in Abschnitt 2 vorgestellt wird.

## 2 Die Signumfunktionsmethode für ARE

Bereits bei der Lyapunovgleichung bestand die Möglichkeit, die Matrix-Signumfunktion zur Lösung zu nutzen. Um diese auf Riccatigleichungen anzuwenden, werden im Folgenden die dafür notwendigen Eigenschaften wiederholt.

Für den skalaren Fall ist die Signumfunktion für alle  $z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$  gegeben durch

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \Re(z) > 0 \\ -1, & \text{falls } \Re(z) < 0 \end{cases}.$$

Die Verallgemeinerung für Matrizen liefert Definition 2.

**Definition 2.** Sei  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix ohne rein imaginäre Eigenwerte, d.h.

$$\Lambda(Z) \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = 0\} = \emptyset$$

Weiterhin habe  $Z$  die Jordan-Normal-Form

$$Z = S^{-1} \begin{bmatrix} J_\ell^- & 0 \\ 0 & J_{n-\ell}^+ \end{bmatrix} S, \quad \Lambda(J_{n-\ell}^+) \subset \mathbb{C}^+, \quad \Lambda(J_\ell^-) \subset \mathbb{C}^-$$

mit einem nicht singulären  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann ist die Matrix-Signumfunktion gegeben durch

$$\text{sign}(Z) := S^{-1} \begin{bmatrix} -I_\ell & 0 \\ 0 & I_{n-\ell} \end{bmatrix} S.$$

Um einen Zusammenhang zwischen der Matrix-Signumfunktion und der Lösung der algebraischen Riccatigleichung herzustellen, betrachten wir einige Eigenschaften der Signumfunktion.

**Satz 3** (Eigenschaften der Matrix-Signumfunktion). Sei  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix ohne rein imaginäre Eigenwerte. Dann gilt:

- $\text{sign}(Z)^2 = I_n$
- $\text{sign}(T^{-1}ZT) = T^{-1} \text{sign}(Z)T$  für alle nicht singulären  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $\text{sign}(Z) = -I_n$  falls  $Z$  Hurwitz ist.
- $P_+ := \frac{1}{2}(I_n + \text{sign}(Z))$  ist ein Spektralprojektor in den zu  $\Lambda(Z) \cap \mathbb{C}^+$  gehörenden Eigenunterraum.
- $P_- := \frac{1}{2}(I_n - \text{sign}(Z))$  ist ein Spektralprojektor in den zu  $\Lambda(Z) \cap \mathbb{C}^-$  gehörenden Eigenunterraum.

Eine Berechnungsmöglichkeit für die Signumfunktion leitet sich aus der Eigenschaft 3.a her, indem wir das Newtonverfahren auf die Gleichung  $Z^2 - I_n = 0$  anwenden. In Algorithmus 1 ist eine mögliche Implementierung dargestellt.

---

**Algorithmus 1** Signumfunktionsiteration

---

**Input:**  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\Lambda(Z) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$

**Output:**  $\text{sign}(Z) = Z_{\text{last}}$

- 1:  $Z_0 = Z$
  - 2: **for**  $j = 0, \dots$  **do**
  - 3:    $Z_{j+1} = \frac{1}{2}(Z_j + Z_j^{-1})$
  - 4: **end for**
- 

*Bemerkung 4.* Die sogenannte Signumfunktions Iteration konvergiert global. In einer Umgebung von  $\text{sign}(Z)$  ist die Konvergenz quadratisch. Es gilt:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Z_j = \text{sign}(Z)$$

Desweiteren ist die Iteration wohldefiniert, denn aus  $Z_j$  ist invertierbar folgt, dass auch  $Z_{j+1}$  invertierbar ist.

Da nach Satz 1 die Lösung der ARE als  $H$ -invarianter Unterraum berechnet werden kann, liegt es nahe die Eigenschaften **d** und **e** aus Satz 3 für die Berechnung des gesuchten Unterraums zu nutzen. Sei dazu

$$\text{sign}(H) = W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dann ist der zu den Eigenwerten in der linken komplexen Halbebene gehörende invariante Unterraum gegeben als Kern des Spektralprojektors  $P_+$ . Es gilt also

$$P_+ \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \stackrel{(3)}{=} P_+ \begin{bmatrix} I \\ -X \end{bmatrix} = 0$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$\begin{aligned} (W + I_{2n}) \begin{bmatrix} I \\ -X \end{bmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} W_{11} + I_n & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} + I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -X \end{bmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} + I_n \end{bmatrix} X &= \begin{bmatrix} W_{11} + I_n \\ W_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Damit haben wir ein überbestimmtes Gleichungssystem für  $X$  erhalten. Über die eindeutige Lösbarkeit dieses Systems trifft der folgende Satz eine Aussage.

**Satz 5.** Sei  $H$  wie in (2) und  $W = \text{sign}(H)$  mit einer Zerlegung wie in (4) gegeben. Weiterhin gelten die Voraussetzungen von Satz 1. Dann ist die positiv definite Lösung der Riccatigleichung (1) die eindeutige Lösung des Systems

$$(W_{22} + I_n)X = W_{21}.$$

*Beweis.* Siehe [2] □

*Bemerkung 6.* Ein Problem dieser Lösungsmethode ist, dass die Signumfunktion nicht für Matrizen mit rein imaginären Eigenwerten definiert ist. Dies stellt jedoch kein weiteres Problem dar. Jedoch treten Konvergenzschwierigkeiten auf, wenn Eigenwerte in der Nähe der imaginären Achse liegen. Weiterhin führt das explizite Aufstellen der Inverse zu Probleme.

### 3 Das Newtonverfahren für ARE

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die algebraische Riccatigleichung als eine nicht-lineare Gleichung aufzufassen und diese mit dem Newtonverfahren zu lösen. Ein Newtonschritt für die ARE(1) hat die Form

$$\mathcal{R}'|_X(N_l) = -\mathcal{R}(X_l), \quad X_{l+1} = X_l + N_l$$

mit der Frechetableitung  $\mathcal{R}'|_X$  von  $\mathcal{R}$  bezüglich  $X$ . Die Frechetableitung lässt sich bestimmen durch

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'|_X(N) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathcal{R}(X + hN) - \mathcal{R}(X)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (Q + A^T(X + hN) + (X + hN)A - (X + hN)G(X + hN) - Q - A^T X - XA + XGX) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (A^T X + hA^T N + XA + hNA - XGX - hXGN - hNGX - h^2 NGN - A^T X - XA + XGX) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (hA^T N + hNA - hNGX - hXGN - h^2 NGN) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (A^T N + NA - NGX - XGN - hNGN) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (A^T - XG)N + N(A - GX) - hNGN \\ &= (A - GX)^T N + N(A - GX). \end{aligned}$$

Dies ist gerade der Lyapunovoperator. Für das Lösen von Lyapunovgleichungen stehen mit dem Bartel-Stewart-Verfahren, Hammerlingsmethode oder dem ADI-Verfahren effiziente Lösungsverfahren zur Verfügung. Wir erhalten also Algorithmus 2 zur Lösung der ARE.

---

#### Algorithmus 2 Newton Verfahren für ARE

---

**Input:**  $A, Q, G$  wie in Satz 1 und Startwert  $X_{(0)}$

**Output:**  $X_\infty$ , welches die ARE (1) löst

- 1: **for**  $j = 1, 2, \dots$  **do**
  - 2:    $A_j = A - GX_{j-1}$
  - 3:   löse  $A_j^T N + NA_j = -\mathcal{R}(X_{j-1})$
  - 4:    $X_j = X_{j-1} + N$
  - 5: **end for**
-

Es wäre jedoch wünschenswert, wenn nicht in jedem Schritt der Riccatioperator ausgewertet werden muss. Weiterhin wäre es von Vorteil, wenn der Updateschritt  $X_j = X_{j-1} + N$  entfallen könnte und  $X_j$  direkt berechnet werden könnte. Dazu betrachten wir den Iterationschritt nochmals:

$$\begin{aligned}
& -Q - A^T X_{j-1} - A X_{j-1} + X_{j-1} G X_{j-1} = (A - G X_{j-1})^T N + N(A - G X_{j-1}) \\
& \stackrel{X_j = X_{j-1} + N}{=} (A - G X_{j-1})^T (X_j - X_{j-1}) + (X_j - X_{j-1})(A - G X_{j-1}) \\
& = (A - G X_{j-1})^T X_j + X_j (A - G X_{j-1}) - A^T X_{j-1} - X_{j-1} A + 2X_{j-1} G X_{j-1} \\
& -Q - X_{j-1} G X_{j-1} = (A - G X_{j-1})^T X_j + X_j (A - G X_{j-1})
\end{aligned}$$

Das so erhaltene modifizierte Verfahren, genannt *Newton-Kleinman-Iteration* [1], ist in Algorithmus 3 dargestellt. Aussagen über die Konvergenz liefert der folgende Satz

---

**Algorithmus 3** Newton-Kleinman Verfahren für ARE

---

**Input:**  $A, Q, G$  wie in Satz 1 und Startwert  $X_{(0)}$

**Output:**  $X_\infty$ , welches die ARE (1) löst

- 1: **for**  $j = 1, 2, \dots$  **do**
  - 2:   löse  $(A - G X_{j-1})^T X_j + X_j (A - G X_{j-1}) = -Q - X_{j-1} G X_{j-1}$
  - 3: **end for**
- 

**Satz 7.** *Seien die Voraussetzungen aus Satz 1 erfüllt, die stabilisierende Lösung  $X_*$  der ARE (1) existiert und der Startwert  $X_0$  ist stabilisierend, dann gilt für die Iterierten  $X_j$  welche durch Algorithmus 2 bzw. 3 erzeugt werden:*

- a) *Alle Iterierten  $X_j$  sind stabilisierend.*
- b)  $X_* \leq \dots \leq X_{j+1} \leq X_j \leq \dots \leq X_1$
- c)  $\lim_{j \rightarrow \infty} X_j = X_*$
- d) *Es existiert eine Konstante  $\gamma > 0$  so dass*

$$\|X_{j+1} - X_*\| \leq \gamma \|X_j - X_*\|^2, \quad j \geq 1$$

*d.h., die Folge der  $X_j$  konvergiert global und quadratisch gegen  $X_*$ .*

*Bemerkung 8.* Falls  $A$  bereits stabilisierend ist, kann das Newtonverfahren auch mit  $X_0 = 0$  gestartet werden. Die Bedingung a ist notwendig um die Lösbarkeit der Lyapunovgleichung in jedem Schritt zu gewährleisten. Der erste Newtonschritt, welcher noch keine quadratische Konvergenz aufweist, sorgt dafür die erste Iterierte in die "richtige Richtung" zu bringen.

## Literatur

- [1] D.L. Kleinman. On an iterative technique for Riccati equation computations. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-13:114–115, 1968.
- [2] Linzhang Lu and C. E. M. Pearce. On the matrix-sign-function method for solving algebraic riccati equations. *Appl. Math. Comput.*, 86(2-3):157–170, 1997.