Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr. Patrick Kürschner, Janna Puderbach

Wintersemester 2017/18

Überblick QR-artige Verfahren

Notation: Q_i, Z_i, V_i, U_i stellen immer orthogonale Matrizen dar!

EWP	unsymmetrisch $Ax = \lambda x$ $A \neq A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$	verallgemeinert $Ax = \lambda Bx$ $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$	symmetrisch $Ax = \lambda x$ $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$	SVD $Av = \sigma u$ $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$
Ziel	$Q^T AQ =$	$Q^T AZ =$, $Q^T BZ =$	$Q^T AQ =$	$U^T AV =$
Algorithmus	Francis-QR	QZ	symm. QR	SVD-QR
Vortrans-formation	Hessenbergreduktion $Q_0^T AQ_0 =$ $=: H_0$	Hessenberg-Dreiecksreduktion $Q_0^T AZ_0 =$ $=: A_0$, $Q_0^T BZ_0 =$ $=: B_0$	Tridiagonalisierung $Q_0^T AQ_0 =$ $=: T_0$	Golub-Kahan-Bidiagonalisierung $U_0^T AV_0 =$ $=: A_0$
Iterations-schritt	Expliziter (Doppel-)Schritt $M_k := H_{k-1}^2 - sH_{k-1} + tI$ (allg. $M_k = p_\ell(H_{k-1})$) $Q_k R_k = M_k$ $H_k = Q_k^T H_{k-1} Q_k$ Implizit nach Francis: **(1.)** $V_0^T M_k e_1 = \alpha e_1$ **(2.)** $V_0^T H_{k-1} V_0 =$ **(3.)** "Buckel-Jagen" $H_k = (V_0^T \cdot \ldots \cdot V_{n-2})^T H_{k-1} (V_0^T \cdot \ldots \cdot V_{n-2}) =$	Impliziter (Mehrfach-)Schritt wird implizit auf $C_{k-1} := A_{k-1} B_{k-1}^{-1} =$ angewendet. Benötigt beidseitige, orthogonale Trafos $Q_k := V_1 \cdot \ldots \cdot V_{n-2}$, $Z_k := U_1 \cdot \ldots \cdot U_{n-2}$ und liefert $C_k := \underbrace{(Q_k^T V_0^T A_{k-1} Z_k)}_{=A_k=}\underbrace{(Q_k^T V_0^T B_{k-1} Z_k)}_{=B_k=}^{-1}$ Unendliche EW (bei B singulär) können "on-the-fly" abgefangen werden.	Wie impliziter Francis-QR mit einfach (o. mehrfach)-Shifts, anstelle von Hessenberg- immer -Struktur	Impliziter symmetrischer QR (Mehrfach-)Schritt wird implizit auf $C_{k-1} := A_{k-1}^T A_{k-1} =$ angewendet. Benötigt beidseitige, orthogonale Trafos $U_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $V_k \in \mathbb{R}^{m\times m}$ so dass $C_k := \underbrace{(U_k^T A_{k-1} V_k)}_{=A_k}^T \underbrace{(U_k^T A_{k-1} V_k)}_{=A_k=}$