Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr. Patrick Kürschner, Janna Puderbach

Wintersemester 2017/18

Einführung Numerische Linear Algebra – Hausaufgabe 6.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis zum 12.01.2018 ein. Die Dateien zu den Programieraufgaben senden Sie bitte an *janna.puderbach@st.ovgu.de*. Der Dateiname sollte Ihren Namen und die zugehörige Hausaufgaben- und Aufgabenummer enthalten, z.B. `name_ha6a2`. Im Fall mehrerer Programmdateien ist die Verwendung eines Dateiarchivierers empfehlenswert. Geben Sie außerdem bitte die Quellcodes Ihrer Programme in ausgedruckter Form zusammen mit den restlichen Aufgaben ab.

Problem 1 **(8 Punkte)** **(Rayleigh-Quotienten-Iteration)**

Seien $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Der Skalar $\theta(x, A) := \theta(x) := \frac{x^T Ax}{x^T x}$ heißt der *Rayleigh-Quotient* zu x bzgl. A.

a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Rayleigh-Quotienten:

- **i)** Homogenität: $\theta(\alpha x, \beta A) = \beta\theta(x, A),\ 0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- **ii)** Translationsinvarianz: $\theta(x, A - \alpha I) = \theta(x, A) - \alpha,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$.
- **iii)** Der Rayleigh-Quotient $\theta(x, A)$ minimiert für beliebige $\mu \in \mathbb{R}$ den Ausdruck $\|(A - \mu I)x\|_2^2$.
- **iv)** Was passiert, wenn x ein exakter Eigenvektor von A ist?
- **v)** Sei nun $x = x_1 + \varepsilon f$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $f \perp x_1$, $\|f\| = \|x\| = 1$ für einen exakten EV x_1 von A. Was bedeuted das für $\theta(x, A)$?

b) Ersetzt man den konstanten Shift μ der inversen Iteration (vgl. HA5) in jedem Schritt durch den Rayleigh-Quotienten $\theta(q_k)$ liefert dies die *Rayleigh-Quotienten-Iteration* (RQI). Sei nun $r_k := (A - \theta(q_k)I)\, q_k$ das Residuum der RQI im k. Schritt. Zeigen Sie, dass $\{\|r_k\|_2,\ k = 0, 1, \ldots\}$ eine monoton fallende Folge für beliebige Startvektoren q_0 ist.

Zusatz: Lassen sich die gezeigten Eigenschaften des Rayleigh-Quotienten, bzw. der RQI, auf eine größere Klasse von Matrizen als $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verallgemeinern?

Problem 2 **(5 Punkte)** **(Einfache Vektor-Iterationen)**

Programmieren Sie die Potenziteration, die inverse Iteration (HA5) und die Rayleigh-Quotienten-Iteration und testen sie diese anhand der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 \end{bmatrix}, \quad B = \texttt{wilkinson}(n),$$

für verschiedene n (z.B. n=20,50,500). Es soll dabei der größte sowie der kleinste EW (+ zugehöriger EV) ausgerechnet werden. Vergleichen Sie die Verfahren, z.b., durch <u>geeignete</u> grafische Darstellung der Residuumsnormen $\|r_k\|_2$.

Problem 3 **(8 Punkte)** **(Verbesserungspotenzial in der QR-Iteration 1)**

Die Basis QR-Iteration

$H_0 := Q_0^* A Q_0$, $(Q_0 = I)$
for $k = 1, 2 \ldots$ **do**
$H_{k-1} =: QR$
$H_k := RQ$
end for

berechnet nach Konvergenz eine Schur-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

a) Programmieren Sie die Basis QR-Iteration. Überlegen Sie sich ein sinnvolles Abbruchkriterium.

b) Ergänzen Sie die QR-Iteration um eine vorherige Hessenberg-Reduktion der Matrix A (vgl. Übung 4), d.h. Q_0 ist die zugehörige Transformationsmatrix.

c) Fügen Sie nun einen einfachen Shift (vgl. HA5A3) $\mu_k = h_{n,n}$ zu der Iteration aus **b)** sowie eine Deflationsausnutzung hinzu.

Vergleichen Sie die Laufzeit der Varianten für die Matrizen $A_1 =$`wilkinson`(10), $A_2 =$ `rand(10)` und erklären Sie Ihre Beobachtungen.

Hinweis: Die Transformation auf Hessenbergform kann entweder mit den Algorithmus aus Übung 4 oder der MATLAB®-Funktion `hess(A)` durchgeführt werden.