Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr. Patrick Kürschner, Janna Puderbach

Wintersemester 2018

Einführung Numerische Linear Algebra – Hausaufgabe 2.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis zum 3.11. ein. Die Dateien zu den Programieraufgaben senden Sie bitte an *janna.puderbach@st.ovgu.de*. Der Dateiname sollte Ihren Namen und die zugehörige Hausaufgaben- und Aufgabenummer enthalten, z.B. `name_ha2a4`. Im Fall mehrerer Programmdateien ist die Verwendung eines Dateiarchivierers empfehlenswert. Geben Sie außerdem bitte die Quellcodes Ihrer Programme in ausgedruckter Form zusammen mit den restlichen Aufgaben ab.

Problem 1 **(5 Punkte)** **(Klassische Splitting Verfahren)**

Wir betrachten das Splitting $A = M - N$, M invertierbar, und die stationären Iterationen aus der Vorlesung. Implementieren Sie in MATLAB®:

- Richardson-Iteration: $M = \frac{I}{\alpha}$, $N = (-A + \frac{I}{\alpha})$, $\alpha > 0$. Nutzen Sie Parameter α gemäß HA1,Problem 4a (bzw. sinnvolle Approximationen).
- Jacobi-Iteration: $M = D$, $N = L + U$,
- Gauss-Seidel-Iteration: $M = D - L$, $N = U$,

wobei $A = D - L - U$ (vgl. Vorlesung). Testen Sie Ihre Implementierungen für die Matrix `A=delsq(numgrid('S',n)` (Poisson-Matrix bzgl. $[0,1]^2$]) für $n = 30$ und die rechte Seite `b=sum(A,2)`. Zur Illustrierung können Sie, z.b., den Verlauf der Residuumsnormen $\|r_k\|_2$, $k = 1, 2, \ldots$ geeignet grafisch darstellen.

Problem 2 **(4 Punkte)** **(Spektra von Matrixfunktionen)**

Beweisen Sie das *spectral mapping theorem* für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar und Polynome f: $\Lambda(f(A)) = \{f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\}$.
Extra: Gilt das auch für allgemeinere Funktionen f und nicht-diagonalisierbare Matrizen?

Problem 3 **(6 Punkte)** **(CG)**

Vervollständigen Sie den Beweis zu Lemma IV.1 aus der Vorlesung und zeigen:

- $(r_{k+1}, p_j) = (r_{k+1}, r_j) = 0 \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, k.$
- $(Ap_{k+1}, p_j) = 0 \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, k.$

Beweisen Sie damit

$$\beta_k = \frac{-(Ar_{k+1}, p_k)}{(Ap_k, pk)} = \frac{(r_{k+1}, r_{k+1})}{(r_k, r_k)}.$$

Problem 4 **(5 Punkte)** **(Steepest Descent & CG)**

Implementieren Sie die Methode des steilsten Abstiegs (steepest descent) und das CG Verfahren. Testen & vergleichen Sie beide Verfahren für A, b aus Problem 1. Stellen Sie neben den Residuumsnormen auch die Fehlernormen $\|x - x_k\|_2$, $\|x - x_k\|_A$ grafisch dar.