Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg Wintersemester 2018
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr. Patrick Kürschner, Janna Puderbach

Einführung Numerische Linear Algebra – 1. Übung

Diese Übungsaufgaben werden in den ersten beiden Übungsterminen besprochen. Es gibt dieses mal keine einzureichenden Aufgaben, allerdings ist es erwünscht, dass Sie die Lösung einer Aufgabe an der Tafel präsentieren.

Problem 1

Homework: Machen Sie sich mit den 1. Kapitel des Buchs "Iterative methods for sparse linear systems" by Yousef Saad: `http://www-users.cs.umn.edu/~saad/IterMethBook_2ndEd.pdf` vertraut.

Problem 2 (6 wichtige Matrixzerlegungen)

Die folgenden sechs Matrixfaktorisierungen sind in der numerischen linearen Algebra äußerst wichtig:

a) Cholesky-,

b) pivotisierte LU-,

c) QR-,

d) Spektral-,

e) Schur- und

f) Singulärwertzerlegung (SVD).

Wiederholen Sie Eigenschaften dieser Faktorisierungen und besprechen Sie dabei auch Existenz und Eindeutigkeit. Welche Algorithmen sind Ihnen für die einzelnen Zerlegungen bekannt?
Kennen Sie weitere wichtige Matrixzerlegungen?

Problem 3

Folgende Operationen werden auf eine 4×4 Matrix A angewendet:

1. Verdoppeln der Spalte 2,
2. Halbieren von Zeile 1,
3. Zeile 2 zu Zeile 4 addieren,
4. Spalte 1 und 2 tauschen,
5. Zeile 1 von allen anderen Zeilen subtrahieren,
6. Spalte 4 durch Spalte 3 ersetzen,
7. Spalte 2 löschen (s.d. die Spaltendimension um 1 reduziert wird).

a) Schreiben Sie dieses Vorgehen als Produkt von 8 Matrizes.

b) Schreiben Sie dies als ein Produkt aus 3 Matrizen UAV mit der originalen Matrix A.

Problem 4 **(QR-Zerlegung)**

a) Zeigen Sie, dass die dünne QR-Zerlegung $A = Q_1 R_1$ eindeutig ist, falls $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $(m > n)$ vollen Spaltenrang hat. $Q_1 \in \mathbb{R}^{m,n}$ hat dabei orthonormale Spalten und $R_1 \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie außerdem, dass R_1 aus dem unteren Dreiecksfaktor G der Cholesky-Faktorisierung von $A^T A$ durch die Identität $R_1 = G^T$ hervorgeht.

b) Berechnen Sie die dünne QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Problem 5 **(Givens Rotationen)**

Eine wichtige Rolle in der numerischen linearen Algebra sind Matrizen, die durch Ähnlichkeitstransformation die originale Matrix A in die Form SAS^{-1} bringen, die wünschenswerte Eigenschaften besitzt. Given-Rotationen sind definiert als Matrizen

$$G(i,k,\theta) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & s & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -s & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \; j \\ \\ \leftarrow \; k \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & j & & k & & \end{array} & \end{array}$$

mit $c = cos(\theta)$ und $s = sin(\theta)$. Diese Matrizen werden benutzt um Einträge in Vektoren und Matrizen zu eliminieren. Leiten die Darstellungen für c und s her, so dass die Matrix $G(j,k,\theta)$ benutzt werden kann um den Eintrag an Position k eines Vektors x mit Hilfe des Eintrags an Position j zu eliminieren: $y := G(j,k,\theta)x$ mit $y_k = 0$. Zeigen sie damit das G orthogonal ist.

Problem 6 **(Eigenwerte und Eigenvektoren)**

Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen die Eigenwerte und die zugehörigen Eigen- und Hauptvektoren sowie die algebraischen (α) und geometrischen Vielfachheiten (γ):

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 15 & 9 \\ -16 & -9 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$