

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 9.

Problem 1 (4 Punkte)

Leiten Sie die '3/8' Regel und die zusammengesetzte Simpsonregel her. [Hinweis: Für die Simpsonregel benutzen Sie bitte $2m$ Intervalle und geeignet gewählte Teilintegrale.]

Problem 2 (4 Punkte)

Implementieren Sie die zusammengesetzte Simpsonregel und die zusammengesetzte Trapezregel und berechnen Sie

$$I = \int_0^1 \cos(x) dx$$

mittels $f = \cos(x)$; $Q = \text{integral}(f, 0, 1)$ und ihren Regeln. Geben Sie den Fehler für verschiedene Werte von n , der Anzahl der Stützstellen, an. Führen Sie für die Trapezregel einen Schritt der Rombergintegration durch.

Problem 3 (4 Punkte)

Für orthogonale Polynome gilt

$$p_{-1}(x) = 0$$

$$p_0(x) = 1$$

$$p_k(x) = (a_k x + b_k) p_{k-1}(x) - c_k p_{k-2}(x) \text{ für } k = 1, 2, \dots$$

Schreiben Sie dies äquivalent als

$$x \mathbf{p}(x) = T \mathbf{p}(x) + \alpha p_N(x) e_N$$

wobei $\mathbf{p} = [p_0, p_1, \dots, p_{N-1}]^T$ mit einem fixen N und einer tridiagonalen Matrix T . Welche Struktur hat diese Matrix? Aus dieser Identität folgt, dass für $p_N(x_j) = 0$ der Wert x_j ein Eigenwert zur Matrix T ist. Was bedeutet dies für die Gauss-Quadratur?

Problem 4 (4 Punkte)

Für die Chebyshev-Polynome gilt

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x$$

$$p_k(x) = 2x p_{k-1}(x) - p_{k-2}(x) \text{ für } k = 2, 3, \dots$$

Stellen Sie die Matrix T , wie in Aufgabe 3 auf und berechnen Sie die Eigenwerte mittels `eig`. Vergleichen Sie für verschiedene Werte von n mit den Nullstellen der Chebyshev-Polynome.

Problem 5 (4 Punkte)

Wir betrachten die Zombie-Epidemie (Geburten und natürliche Tode werden vernachlässigt) mittels des Modells

$$S' = -\beta SZ$$

$$Z' = \beta SZ + \xi R - \alpha SZ$$

$$R' = \alpha SZ - \xi R$$

es gilt

$$\alpha = 0.005, \beta = 0.0095, \xi = 0.0001.$$

Implementieren Sie das explizite Eulerverfahren und lösen Sie die ODE mit einer von Ihnen gewählten Schrittweite.