Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr.Martin Stoll, Björn Baran

Sommersemester 2016

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 7.

Problem 1 **(4 Punkte)**

Splines können auch zur Interpolation über parametrische Koordinaten verwendet werden. Testen Sie den folgenden Code selbst.

```
x=[1,2,3,2,1.2,2,2.7]; % x-values
y=[1,0,1,2.5,3.4,4,3.2]; % y-values
n=length(x);
axis square, hold on
t=0:1:n-1; % parametric coordinate
tt=0:0.01:n-1; % interpolant evaluation points
xx=spline(t,x,tt); yy=spline(t,y,tt);
plot(xx,yy); plot(x,y,'o');
grid on; shg
```

In ähnlicher Weise parametrisieren Sie

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	3	1.75	0.9	0	0.5	1.5	3.25	4.25	4.25	3	3.75	6.00
y	4	1.60	0.5	0	1.0	0.5	0.50	2.25	4.00	4	3.25	4.25

Zeichnen Sie den so erhaltenen Buchstaben und dann in das gleiche Fenster (`hold on` in Matlab) die obigen Kommandos mit x duch $2x$ und y durch $2y$ skaliert. Was sehen Sie?

Problem 2 **(6 Punkte)**

Wir behandeln den natürlichen kubischen Spline. Wir betrachten äquidistante Stützstellen x_k mit $x_{k+1} - x_k = h$ mit $k = 0, \dots, n-1$. Wir definieren

$$m_k := S''(x_k) \text{ und } I_k = [x_k, x_{k+1}].$$

Da $S_{|I_k} \in \Pi^3$ ist $S''_{|I_k}$ linear und es gilt

$$S''_{|I_k}(x) = \frac{(x_{k+1} - x)m_k + (x - x_k)m_{k+1}}{h}.$$

Verifizieren Sie, dass

$$S_{|I_k}(x) = \frac{(x_{k+1} - x)^3 m_k + (x - x_k)^3 m_{k+1}}{6h} + C_k(x - x_k) + D_k(x_{k+1} - x)$$

aus zweimaligem Integrieren von

$$S''_{|I_k}(x)$$

hervorgeht. Nutzen Sie $S_{|I_k}(x_k) = f(x_k) = y_k$ (Interpolation) und $S_{|I_k}(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) = y_{k+1}$ (Stetigkeit) um die Konstanten C_k und D_k zu ersetzen.
Nutzen Sie den erhaltenen Ausdruck und

$$S'_{|I_{k-1}}(x_k) = S'_{|I_k}(x_k) \quad \forall k = 1, \dots, n-1$$

und leiten Sie daraus das folgende Gleichungssystem her

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_0 - 2y_1 + y_2 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}.$$

Welche Werte benutzen Sie für m_0 und m_n?

Problem 3 (2 Punkte)

Die Systemmatrix aus der letzten Aufgabe ist invertierbar. Geben Sie eine kurze Begründung warum dies so ist!

Problem 4 (4 Punkte)

Sei C eine Zyklische Matrix (circulant matrix)[1]. Erzeugen Sie mit dem Matlab Befehl `C=gallery('circul',v);` eine solche Matrix der Größe n. Der Vektor v kann von Ihnen gewählt werden. Konstruieren Sie die Fourier Matrix F aus der Vorlesung in Matlab. Verifizieren Sie numerisch, dass gilt

$$\frac{1}{n} F^* C F = \Lambda$$

mit Λ den Eigenwerten von C. Verifizieren Sie ausserdem, dass $\mathrm{diag}(F^* c) = \Lambda$, mit c der ersten Spalte von C. Wenn wir annehmen, dass C^{-1} existiert, was gilt dann für die Anwendung von C^{-1}? Welche Komplexität können wir für die Anwendung von C^{-1} erwarten wenn wir annehmen, dass die FFT angewendet werden kann.

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Circulant_matrix`