Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Dr.Martin Stoll, Björn Baran

Sommersemester 2016

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 4.

Problem 1 **(4 Punkte)**

Die folgenden Verfahren sollen in Matlab implementiert werden (Richardson Iteration, Jacobi Iteration und Gauss-Seidel Iteration). Testen sie ihren Code für verschiedene Werte von n und die Matrix `A=gallery('poisson',n)` mit der rechten Seite `b=sum(A,2)`! Für die Richardson Iteration verwenden Sie verschiedene Werte von α und insbesondere $\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda\min(A)+\lambda_{\max}(A)}$. Sie können `[V,D]=eig(A);` für die Berechnung der Eigenwerte verwenden, aber in der Praxis wäre dies viel zu teuer.

Problem 2 **(4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Jacobi Iteration angewandt auf eine symmetrische Matrix A, die strikt diagonal-dominant ist, immer konvergiert.

(b) Betrachten Sie die Jacobi-Iteration für die gegebene Matrix und geben Sie eine Abschätzung für den Spektralradius an.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 495 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 500 \end{bmatrix}.$$

Problem 3 **(2 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Matrix AA^T symmetrisch und positiv definit ist. Welche Konditionszahl besitzt diese Matrix?

Problem 4 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die gedämpfte Jacobi-Iteration

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}(b - Tx^{(k)})$$

für die Matrix

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

konvergiert. Wie unterscheiden sich die Konvergenzgeschwindigkeiten für die Werte $\omega = 1$ und $\omega = 2/3$?

Problem 5 **(4 Punkte)**

Wir betrachten Cimminos Verfahren, eine stationäre Iteration zum Lösen von $Ax = b$, welches geschrieben werden kann als

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{2}{\mu} A^T D^T D (b - Ax^{(k)})$$

mit

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{m_1}}{\|a_1\|} & & & \\ & \frac{\sqrt{m_2}}{\|a_2\|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\sqrt{m_2}}{\|a_2\|} \end{bmatrix}$$

und Skalaren m_i. Außerdem sind a_i die Zeilen von A und $\mu = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Zeigen Sie, dass für den Fall $m_i = \|a_i\| = 1$ das obige Verfahren einer gedämpften stationären Iteration für die Normalengleichung

$$A^T Ax = A^T b$$

entspricht. Welchen Unterschied gibt es falls $m_i = \|a_i\|^2$ angenommen wird?